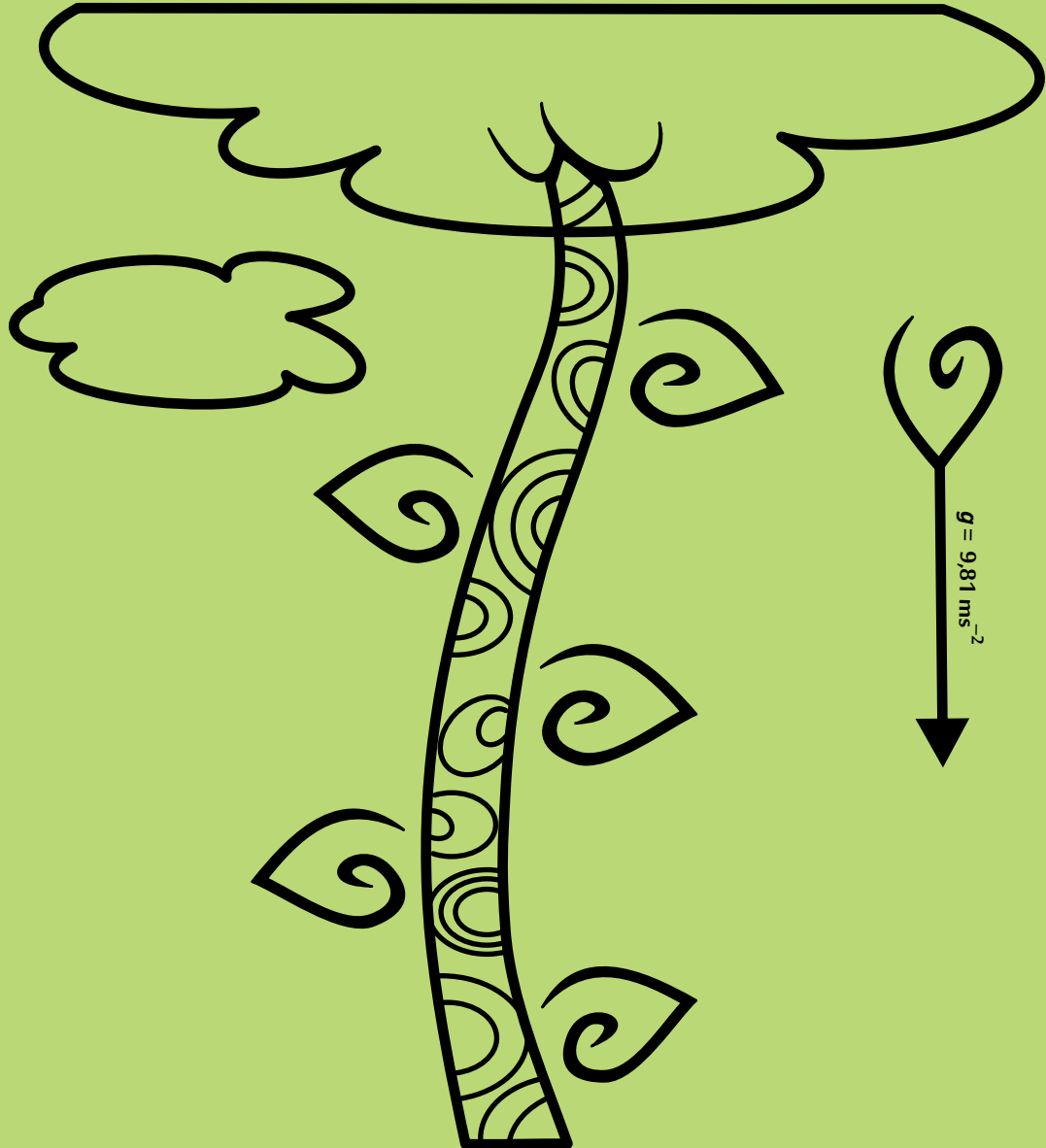




Letní škola matematiky a fyziky



2016

sborník příspěvků

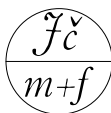
Bedřichov



JEDNOTA ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYZIKŮ
POBOČKA V ÚSTÍ NAD LABEM

LETNÍ ŠKOLA MATEMATIKY A FYZIKY 2016

SBORNÍK PŘÍSPĚVKŮ



Vydání sborníku a realizace Letní školy matematiky a fyziky 2016 v Bedřichově byla finančně podpořena grantem MŠMT programu Podpora nadaných žáků základních a středních škol v roce 2016 č. 0095/7/NAD/2015.

Text sborníku neprošel jazykovou úpravou.

Vydal: Vydavatelský servis, Plzeň

Editorky: Magdalena Krátká, Pavla Hofmanová, 2016

ISBN 978-80-86843-55-1 (online)

ISBN 978-80-86843-54-4 (brož. vyd.)

OBSAH

SEZNAM AUTORŮ PŘÍSPĚVKŮ	4
Eva Hejnová Úlohy zadané formou diskuze na téma optika (příspěvek k semináři pro učitele)	5
Eva Hejnová Zajímavé úlohy z optiky aneb několik případů inspektora Kopřivy (příspěvek k semináři pro žáky)	13
Stanislav Jakoubek Experimentální určení Richardsonova vztahu	21
Štěpán Kolář Gravitační vlny	31
Jan Kopka Zkoumání celých čísel	41
Magdalena Krátká Počítání bez nuly	53
Martin Kruliš Číslicová logika	57
Petr Mentlík Rozvíjení prostorové představivosti pomocí M-cubes	63
Jan Petrásek Elektrická měření neelektrických veličin	67
Jan Petrásek Fyzika jako nástroj komunikace	81
Luboš Pick Silný zákon malých čísel	95
Hana Turčinová Sférická geometrie	107
Drahomír Zrůst Zapojme své studenty (aneb pomůcky nemusí být drahé...)	115

SEZNAM AUTORŮ PŘÍSPĚVKŮ

Hejnová Eva – eva.hejnova@ujep.cz
 katedra fyziky, Přírodovědecká fakulta UJEP v Ústí nad Labem

Jakoubek Stanislav – jakoubek.stanislav@centrum.cz
 Střední škola AGC, a. s., Teplice

Kolář Štěpán – stepk.kolar@gmail.com
 Matematicko-fyzikální fakulta UK v Praze

Kopka Jan – jan.kopka@ujep.cz
 katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta UJEP v Ústí nad Labem

Krátká Magdalena – magdalena.kratka@ujep.cz
 katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta UJEP v Ústí nad Labem

Kruliš Martin – krulis@ksi.mff.cuni.cz
 katedra softwarového inženýrství, Matematicko-fyzikální fakulta UK v Praze

Mentlík Petr – petr.mentlik@email.cz
 ZŠ Sokolov, Rokycanova 258

Petrásek Jan – petrasek.jan@outlook.com
 UFY a UAI, Přírodovědecká fakulta Jihočeské University

Pick Luboš – pick@karlin.mff.cuni.cz
 katedra matematické analýzy, Matematicko-fyzikální fakulta UK v Praze

Turčinová Hana – TurcinovaHana@seznam.cz
 Matematicko-fyzikální fakulta UK v Praze

Zrůst Drahomír – tuton@centrum.cz
 Gymnázium V. Hlavatého, Louny

ÚLOHY ZADANÉ FORMOU DISKUZE NA TÉMA OPTIKA (PŘÍSPĚVEK K SEMINÁŘI PRO UČITELE)

Eva Hejnová

ÚVOD

Na letní škole, která se konala v roce 2012 v Hošťce, jsem se zabývala úlohami zadanými ve formě diskuse na téma Síla pohyb. V roce 2015 na letní škole v Bedřichově jsem prezentovala soubor úloh tohoto typu na téma Gravitace. Na této letní škole jsem na předchozí témata navázala a představila jsem nový soubor úloh k tématu Optika.

CHARAKTERISTIKA SOUBORU ÚLOH

Bližší informace o charakteristice úloh, které jsou zadány formou diskuse, jsou k dispozici v předchozích příspěvcích, které byly již publikovány ve sbornících z obou výše uvedených letních škol. Na tomto místě proto jen ve stručnosti uvedme, že v úloze zadané formou diskuse vystupují zpravidla tři nebo čtyři mluvčí (viz obr. 1), kteří prezentují své názory na určitý problém. Zpravidla bývá jedna z odpovědí z vědeckého hlediska správná, ale nutně tomu vždy tak být nemusí. Jako alternativy odpovědí jsou užívány nejčastější chybné odpovědi, které vycházejí zpravidla z miskoncepcí, jež se běžně u žáků objevují [1]. Diskutovaný problém je uveden vždy ve formě otázky, což usnadňuje dětem pochopení toho, k čemu se jednotliví mluvčí vyjadřují. Pro názornost je každá úloha doplněná fotografií nebo jednoduchou ilustrací a pro usnadnění čtení jsou klíčová slova vyznačena barevně (modře).

Během semináře realizovaného na letní škole bylo představeno celkem 27 úloh, které pokrývají celou oblast učiva optiky; konkrétně jsou zaměřeny na problematiku světlených zdrojů a šíření světla, vznik a velikost stínu, na odraz a lom světla a barvu těles. Ke každé úloze je zpracována metodická poznámka, ve které je předložený problém podrobněji diskutován, u některých úloh jsou uvedeny i náměty na další aktivity a pokusy, jež může učitel s žáky realizovat. Úlohy jsou určeny pro žáky 1. a 2. stupně základních škol, ale některé z nich lze dobře využít i na středních školách. Učitelé mohou pomocí úloh zjistit, jaké představy jejich žáci mají, a následně jim poskytnout bezprostřední zpětnou vazbu při jejich učení.

Optika *Ryba pod vodou*



Robert chce zasáhnout rybu, kterou vidí pod vodou. Kam musí mířit?

A Musí mířit **do místa, kde rybu vidí**. Ryba se mu pod vodou zdá větší, než je ve skutečnosti, takže ji lépe trefí.

B Musí mířit **do místa nad ní**, protože voda zakříví paprsek směrem nahoru.

C Měl by mířit někam **do místa pod ní**, paprsek se ve vodě láme.

D Nemáte pravdu. Já si myslím, že ...

Jana

Katka

Lukáš

Vojta

Poznámka

Obr. 1: Ukázka úlohy zadané formou diskuze

Soubory úloh (ve formátu PDF a FLP) pro téma Pohybové zákony, Gravitace a optika a metodické poznámky k úlohám včetně řešení jsou dostupné na adrese http://physics.ujep.cz/~ehejnova/Pro_ucitele/index4.html. Dále lze na adrese http://physics.ujep.cz/~ehejnova/Pro_ucitele/Letni_skola_2016/ nalézt celou prezentaci z letní školy (opět ve formátu PDF a FLP).

UKÁZKY ÚLOH A POKUSŮ K TÉMATU OPTIKA

K některým úlohám byly v rámci semináře předvedeny i jednoduché pokusy, které jsou realizovatelné s jednoduchými pomůckami a jsou dobře použitelné v běžné školní výuce. Kromě pokusů byla prezentace doplněna i náměty na další zajímavé aktivity (např. detektivky z fyzikální tematikou, test barvocitu, barevné paobrazy apod.), všechny tyto náměty lze nalézt v prezentaci ze semináře.

Uvedme dále dvě ukázky úloh a náměty na pokusy, které byly na semináři předvedeny.

Optika *Fotografování v zrcadle*

 Lenka je půl metru od zrcadla a chce se vyfotit. Na jakou vzdálenost musí být její fotoaparát nastaven, aby její fotografie byla ostrá?

 **A** Fotoaparát musí být nastaven na **jeden metr**.

B Fotoaparát musí být nastaven na **půl metru**.

 **C** Fotoaparát musí být nastaven na **nekonečno**.

D Nemáte pravdu. Já si myslím, že ...

 **Jirka**

 **Petr**

 Zdroj: <http://www.mafinon-astro.com/2011/04/jirka-je-na-metu.html>

Poznámka

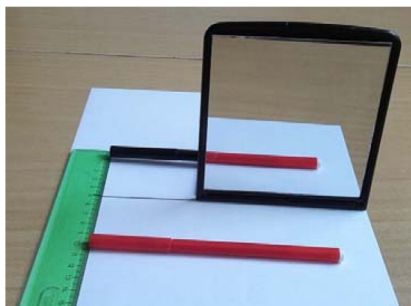
Obr. 2: Úloha Fotografování v zrcadle

FOTOGRAFOVÁNÍ V ZRCADLE

STRUČNÝ KOMENTÁŘ K ÚLOZE „FOTOGRAFOVÁNÍ V ZRCADLE“

Správná odpověď je A. Děti si velmi často chybně myslí, že obraz předmětu leží v rovině zrcadla, proto volí odpověď B.

Ověřující pokus: V učebnicích fyziky se hledání obrazu předmětu často řeší tak, že se předmět položí na pravítko, které se rovinným zrcadlem zobrazí společně s předmětem. Tento pokus ale nelze považovat za dostatečný důkaz toho, že předmět a jeho obraz mají od rovinného zrcadla stejnou vzdálenost, neboť lze vyslovit pochybnost, že zrcadlo může délky nějak zkreslovat. Vhodnější je vzít dva stejné nebo velmi podobné předměty (např. fixy apod.) a najít místo, kde splyne druhý předmět s obrazem prvního předmětu (obr. 3). Tak jednoznačně ukážeme, že obraz je ve stejné vzdálenosti od rovinného zrcadla jako předmět [2].



Obr. 3: Pokus potvrzující stejnou vzdálenost předmětu a jeho obrazu od zrcadla

MÍCHÁNÍ BAREV



Optika

Míchání barev



Jaká barva vznikne, smíchá-li se zelené, červené a modré světlo?



Vojta

A Smícháním vznikne **černá** barva.



Katka

C Smícháním vznikne **hnědá** barva.



Petr

B Smícháním vznikne **bílá** barva.



Martina

D Nemáte pravdu. Já si myslím, že ...

Poznámka

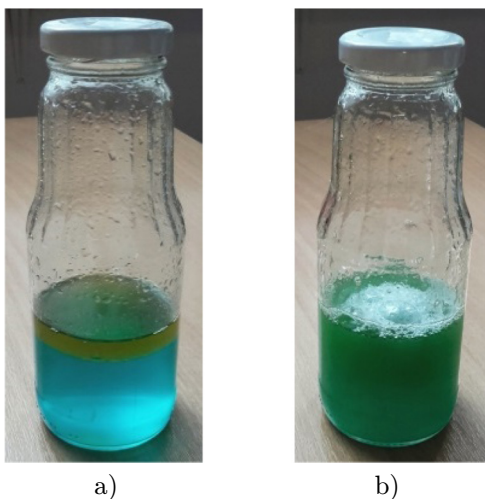
Obr. 4: Úloha Míchání barev

STRUČNÝ KOMENTÁŘ K ÚLOZE „MÍCHÁNÍ BAREV“

Správná odpověď je B. Děti si často myslí, že složením světél základních barev vznikne černá nebo hnědá barva. Zdrojem těchto představ je zřejmě skutečnost, že jestliže smícháme několik barev, dostaneme obvykle nějakou „špinavou“ barvu (např. hnědou nebo černou).

Ověřující pokus: Složit základní barvy lze např. pomocí LED diod, podrobněji je skládání základních barev pomocí LED diod popsáno v příspěvku Václava Piskače [3, 4].

V rámci tématu skládání barev můžeme se žáky provádět mnoho zajímavých a jednoduchých experimentů, které mohou děti provádět i samy (např. jako domácí pokus). Uvedme zde alespoň dva náměty na takové pokusy.



Obr. 5: Míchání barev pomocí kapalin

1. Skládání dvou barev lze demonstrovat poněkud netradičně pomocí míchání dvou vhodných kapalin, např. ústní vody a olivového oleje [5]. Do čiré nádoby s uzávěrem nalijeme modrou ústní vodu tak, abychom vytvořili asi 5 cm vysoký sloupec. Na ni nalijeme vrstvu olivového oleje o výšce asi 0,5 cm. Olej na ústní vodě plave (obr. 5a). Jestliže kapaliny protřepáním smícháme, uvidíme jasně zelenou barvu (obr. 5b). Pokud je nádoba v klidu, olej a ústní voda se od sebe poměrně rychle opět oddělí, což děti obvykle zaujme (této skutečnosti můžeme využít i k diskusi o hustotách kapalin). Výhodou této varianty pokusu je jeho snadná příprava i provedení. Lahvičku s kapalinami lze uchovat i několik měsíců.
2. Mnoho zajímavých pokusů lze provádět také s dělením barev [6]. Na bílou křidu uděláme asi 2 cm od okraje barevnou fixou krátkou, dostatečně výraznou čárku nebo tečku. Na každou stěnu můžeme použít jinou barvu, přičemž dbáme na to, aby se čárky nespojily. Křidu pak postavíme do malé misky s vodou (obr. 6).



Obr. 6: Křída s vyznačenou barvou na začátku pokusu

Křída nasaje vodu a barvy se rozloží (obr. 7a, b; použita byla oranžová, zelená, fialová a černá barva, jejichž pigmenty se dobře rozkládají do několika barev).



a)



b)

Obr. 7: Rozklad barev na křídě

Tento pokus můžeme provést i v jiné variantě, kdy místo křídý použijeme savý papír (např. nastříhané proužky z kuchyňské utěrky). Na proužek papíru uděláme přibližně 2 cm od okraje fixou barevnou tečku. Proužky papíru vložíme do misky s vodou tak, aby barevné tečky nebyly ponořeny přímo do vody. Opět můžeme pozorovat rozklad barvy (obr. 8; byly použity stejné barvy jako v předchozím případě).

Protože barevné odstíny fixů nebo přírodních barviv jsou směsí různých barev (pigmentů), můžeme pozorovat rozklad původní barvy do několika různých barev. Molekuly každého pigmentu mají různou barvu, liší se ale také např. velikostí a tím, jak dobře se „drží“ na hladině. Menší molekuly



Obr. 8: Rozklad barev na proužcích z kuchyňské utěrky

se udrží na hladině déle, proto urazí na papíře delší vzdálenost, než na něm ulpí [7]. Na obr. 7a, b i na obr. 8 lze vidět, že molekuly žlutého pigmentu „docestují“ nejdále, molekuly modrého pigmentu urazí naopak nejmenší vzdálenost.

ZÁVĚR

Vytvořený soubor úloh může dobře posloužit k odhalování mezer ve znalostech žáků z oblasti optiky a také k identifikaci představ konkrétních dětí. Většina úloh může být také doplněna jednoduchými pokusy, pomocí nichž si děti mohou ověřit pravdivost, či nepravdivost jednotlivých tvrzení. Výhodou těchto experimentů je, že je děti mohou provádět i samy doma.

LITERATURA

- [1] Mandíková, D., Trna, J.: *Žákovské prekoncepce ve výuce fyziky*. 1. vyd. Brno: Paido, 2011. 245 s.
- [2] Heuréka, <http://kdf.mff.cuni.cz/heureka>, Geometrická optika, červenec 2015.
- [3] <http://vnuf.cz/sbornik/prispevky/15-23-Piskac.html>
- [4] http://fyzikalnisuplik.websnadno.cz/fyzika/barevna_svetla.pdf

- [5] Arnold, N.: *Rizikantní experimenty*. Praha: Egmont ČR, 2005.
- [6] Klečková, M. a kol.: *Chemická dobrodružství*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2000.
- [7] Brownová, C. L.: *Úžasné chemické pokusy v kuchyni*. Brno: Edika, 2015.

ZAJÍMAVÉ ÚLOHY Z OPTIKY ANEB NĚKOLIK PŘÍPADŮ INSPEKTORA KOPŘIVY (PŘÍSPĚVEK K SEMINÁŘI PRO ŽÁKY)

Eva Hejnová

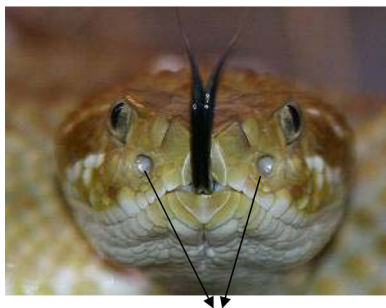
Na semináři jsme se zabývali úlohami na téma optika, dělali jsme několik pokusů, četli jsme detektivku, zkoušeli test barvocitu a „zírali“ jsme na paobrazy. Prezентaci ze semináři si můžeš znovu prohlédnout, najdeš ji na adrese http://physics.ujep.cz/~ehejnova/Pro_ucitele/Letni_skola_2016/ (ve formátu PDF a FLP).

V tomto příspěvku si připomeneme některé úlohy a pokusy, které jsme společně dělali. Vybrala jsem pokusy, které se dají provést jen s jednoduchými pomůckami, aby sis je mohl sám ještě jednou vyzkoušet.

SVĚTELNÝ KVÍZ

Začali jsme nejprve „světelným“ kvízem. Úkolem bylo rozhodnout, co je pravda a co lež.

1. Bez slunečního světla byste neviděli duhu. (Lež – lze použít jakékoliv bílé světlo, které lze rozložit na spektrum a udělat tak duhu.)
2. Bez slunečního světla byste neviděli Polárku. (Lež – Polárka je hvězda, je tedy sama zdrojem světla.)
3. Jestliže je tma jako v pytli, tvůj obličej se neobjeví v zrcadle. (Pravda – pokud na obličej nedopadá žádné světlo, svůj obličej v zrcadle neuvidíš.)
4. Jestliže je tma, jedovatý chřestýš neodhalí, kde se ukrýváš. (Lež – chřestýš má speciální orgány (jakási čidla), kterými může zachytit infračervené záření (podívej se na obr. 1, čidla jsou umístěna pod očima chřestýše).



Obr. 1: Čidla pro infračervené záření

UKÁZKY ÚLOH A POKUSŮ

K některým úlohám byly v rámci semináře předvedeny i jednoduché pokusy, které jsou realizovatelné s jednoduchými pomůckami. Pojďme si několik z nich připomenout a přidat k nim i stručný komentář.

ÚLOHA FOTOGRAFOVÁNÍ V ZRCADLE (OBR. 2)

Optika **Fotografování v zrcadle**

Lenka je půl metru od zrcadla a chce se vyfotit. Na jakou vzdálenost musí být její fotoaparát nastaven, aby její fotografie byla ostrá?

A Fotoaparát musí být nastaven **na jeden metr.**

B Fotoaparát musí být nastaven **na půl metru.**

C Fotoaparát musí být nastaven **na nekonečno.**

D Nemáte pravdu. Já si myslím, že ...

Jana

Katka

Jirka

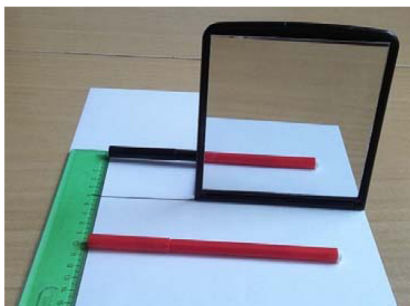
Petr

Poznámka

Obr. 2: Úloha Fotografování v zrcadle

Správná odpověď je A, i když si mnoho lidí myslí, že obraz předmětu leží v rovině zrcadla, a volí proto odpověď B.

Pokus: V učebnicích fyziky se hledání obrazu předmětu často řeší tak, že se předmět položí na pravítko, které se rovinným zrcadlem zobrazí společně s předmětem. Tento pokus ale nelze považovat za dostatečný důkaz toho, že předmět a jeho obraz mají od rovinného zrcadla stejnou vzdálenost, neboť lze vyslovit pochybnost, že zrcadlo může délky nějak zkreslovat. Vhodnější je vzít dva stejné nebo velmi podobné předměty (např. fixy apod.) a najít místo, kde splyne druhý předmět s obrazem prvního předmětu (obr. 3). Tak jednoznačně ukážeme, že obraz je ve stejné vzdálenosti od rovinného zrcadla jako předmět.



Obr. 3: Pokus potvrzující stejnou vzdálenost předmětu a jeho obrazu od zrcadla

MÍCHÁNÍ BAREV (OBR. 4)



Optika

Míchání barev



Jaká barva vznikne, smíchá-li se zelené, červené a modré světlo?



Vojta

A Smícháním vznikne **černá** barva.



Katka

C Smícháním vznikne **hnědá** barva.



Petr

B Smícháním vznikne **bílá** barva.



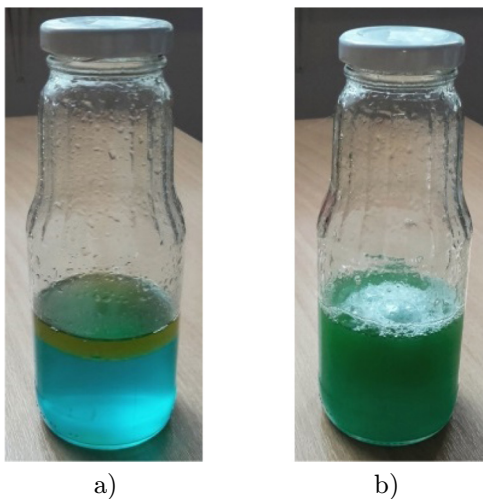
Martina

D Nemáte pravdu. Já si myslím, že ...

Poznámka

Obr. 4: Úloha Míchání barev

Správná odpověď je B. Mnoho lidí si myslí, že složením světél základních barev vznikne černá nebo hnědá barva. Zdrojem těchto představ je zřejmě skutečnost, že jestliže smícháme několik barev, dostaneme obvykle nějakou „špinavou“ barvu (např. hnědou nebo černou).



Obr. 5: Míchání barev pomocí kapalin

Pokus: V rámci tématu skládání barev lze provádět mnoho zajímavých a jednoduchých experimentů. Na semináři jsme si ukazovali dva pokusy.

1. Skládání dvou barev lze demonstrovat trochu netradičně pomocí míchání dvou vhodných kapalin, např. ústní vody a olivového oleje. Do čiré nádoby s uzávěrem nalijeme modrou ústní vodu tak, abychom vytvořili asi 5 cm vysoký sloupec. Na ni nalijeme vrstvu olivového oleje o výšce asi 0,5 cm. Olej na ústní vodě plave (obr. 5a). Jestliže kapaliny protřepáním smícháme, uvidíme jasně zelenou barvu (obr. 5b). Pokud je nádoba v klidu, olej a ústní voda se od sebe poměrně rychle opět oddělí. Lahvičku s kapalinami lze uchovat i několik měsíců.
2. Mnoho zajímavých pokusů lze provádět také s dělením barev. Na bílou křidu uděláme asi 2 cm od okraje barevnou fixou krátkou, dostatečně výraznou čárku nebo tečku. Na každou stěnu můžeme použít jinou barvu, přičemž dbáme na to, aby se čárky nespojily. Křidu pak postavíme do malé misky s vodou (obr. 6).

Křida nasaje vodu a barvy se rozloží (obr. 7a, b; použita byla oranžová, zelená, fialová a černá barva, jejichž pigmenty se dobře rozkládají do několika barev).

Tento pokus můžeme provést i v jiné variantě, kdy místo křidy použijeme savý papír (např. nastříhané proužky z kuchyňské utěrky). Na proužek papíru uděláme přibližně 2 cm od okraje fixou barevnou tečku. Proužky papíru vložíme do misky s vodou tak, aby barevné tečky nebyly ponořeny přímo do vody. Opět můžeme pozorovat rozklad barvy (obr. 8; byly použity stejné barvy jako v předchozím případě).



Obr. 6: Křída s vyznačenou barvou na začátku pokusu



a)



b)

Obr. 7: Rozklad barev na křídě



Obr. 8: Rozklad barev na proužcích z kuchyňské utěrky

Protože barevné odstíny fixů nebo přírodních barviv jsou směsí různých barev (pigmentů), můžeme pozorovat rozklad původní barvy do několika různých barev. Molekuly každého pigmentu mají různou barvu, liší se ale také např. velikostí a tím, jak dobře se „drží“ na hladině. Menší molekuly se udrží na hladině déle, proto urazí na papíře delší vzdálenost, než na něm ulpí. Na obr. 7a, b i na obr. 8 lze vidět, že molekuly žlutého pigmentu „docestují“ nejdále, molekuly modrého pigmentu urazí naopak nejmenší vzdálenost.

SVÍTILNA VE VESMÍRU (OBR. 9)

Optika

Svítilna ve vesmíru




Jirka



Vojta

Uvidí kosmonaut kužel světla, když rozsvítí ve vesmíru silnou svítilnu?

A Kužel světla **uvidí**, protože **svítilna je silná a svítí hodně jasně.**

B Kužel světla **nevidí**, protože **ve vesmíru není žádný vzduch.**

C Kužel světla **nevidí**, protože **ve vesmíru není žádný prach a nečistoty.**

D Nemáte pravdu. Já si myslím, že ...



Zdroj: <http://www.nasa.gov>



Jana



Martina

Poznámka

Obr. 9: Úloha Svítilna ve vesmíru

Správná je odpověď C. V prostoru, ve kterém se kosmonaut nachází, nejsou žádné částice (prach a nečistoty), na kterých by se světlo ze svítilny rozptylovalo. Co se týče odpovědi Jany (B), pokud bychom se nacházeli v prostředí, ve kterém by byl vzduch velmi čistý (např. v jeskyni), kužel světla (resp. paprsky světla) bychom také neviděli.

Pokus: Jednoduchý pokus lze provést např. s laserovým zdrojem, ze kterého necháme úzký světelný svazek procházet různě znečištěnými prostředími (např. vzduchem znečištěným kouřem nebo prachem). Zdrojem kouře může být např. vonná tyčinka, která vytváří dostatečné množství kouře, jež můžeme snadno jímat do čiré PET lahve (obr. 10a). Lahvi s kouřem pak necháme procházet laserový paprsek (obr. 10b). Tímto způsobem lze jednoduše a rychle ukázat zviditelnění paprsku ve znečištěném prostředí. Do lahve můžeme posvítit i baterkou. Světlo se bude na kouřových částicích rozptylovat a vnitřek lahve se jakoby trochu rozsvítí.



a)



b)

Obr. 10: Zviditelnění paprsku v kouři

Na podobném principu pracují laserové radary, které se používají k měření znečištění zemského ovzduší. Laserový paprsek se částečně odráží a částečně rozptyluje na částicích obsažených v ovzduší. Odražené signály se pak vyhodnocují. Tímto způsobem je možno určit rozložení a směr pohybu kouřových částic a dalších znečišťujících látek v ovzduší.

Všechny pokusy, které jsou v tomto příspěvku uvedeny, si můžeš doma sám vyzkoušet. Pomůcky jsou jednoduché a najdeš je určitě i doma (jako zdroj světla pro poslední pokus můžeš použít i baterku). Pokud si experimenty sám vyzkoušíš, možná tě napadnou i jiné způsoby jejich provedení. V každém případě při samostatném experimentování objevíš něco zajímavého a zažiješ spoustu zábavy.

EXPERIMENTÁLNÍ URČENÍ RICHARDSONOVA VZTAHU

Stanislav Jakoubek

Přemýšleli jste někdy o tom, jak z mapy určit nějakou vzdálenost? Třeba délku hranice? Pan Richardson ano. A že to není tak triviální otázka, o tom nás snad přesvědčí následující příspěvek.

ZA VŠÍM HLEDEJ ČLOVĚKA. . .

Pojďme si společně připomenout zajímavou osobnost anglického matematika, fyzika, meteorologa, psychologa a pacifisty v jedné osobě, Lewise Fry Richardsona, od jehož narození letos uplynulo 135 let.



Obr. 1: Lewis Fry Richardsdon [5]

Nejprve pár biografických údajů (zpracováno dle [2]). Lewis Fry Richardson se narodil 11. října 1881 ve městě Newcastle upon Tyne v Anglii (zemřel 30. září 1953) jako nejmladší ze sedmi dětí do bohaté **kvakerské** rodiny. Tato skutečnost je podstatná, jak se později zmíním.

V mládí se mu dostalo výborného vzdělání. Nejprve na kvakerské internátní škole v Yorku, poté na univerzitě v Durhamu (kurzy matematické fyziky, chemie, botaniky a zoologie) a nakonec na univerzitě v Cambridgi, kde v roce 1903

ukončil studium přírodních věd. Ve věku 47 let získal doktorát z matematické psychologie na Londýnské univerzitě.

Richardson byl velmi všestranný vědec. Zabýval se mimo jiné meteorologií. Byl průkopníkem použití diferenciálních rovnic při předpovídání počasí (1922). Tato metoda se dnes běžně používá, v Richardsonově době neexistovala výpočetní technika schopná řešit takové úlohy. V rámci meteorologie se také zabýval atmosférickou turbulencí. V této oblasti je po něm pojmenováno tzv. *Richardsonovo číslo*. Pro zájemce např. [6].

Zasloužil se dále například o rozvoj v oblasti numerické matematiky. Je po něm pojmenována *Richardsonova extrapolace*.

Toto vše je nesmírně zajímavé, nicméně v tomto příspěvku se chci zmínit ještě o jiné oblasti jeho odborného zájmu. Již jsem uvedl, že pocházel z kvakerské rodiny. O co šlo? Kvakerství je náboženské hnutí vycházející z křesťanství. Kvakeri neuznávají autoritu státu, odmítají přísahu a vojenskou službu, vystupují proti rasizmu, sociálnímu útisku a jsou aktivní v mírovém hnutí. Další podobnosti např. [1]. Richardsonova kvakerská víra, která zahrnovala silný pacifismus, ho vedla k pokusům matematicky pochopit vznik mezinárodního konfliktu. Proto bývá považován za spoluzakladatele vědecké analýzy konfliktu, která zkoumá podmínky vzniku válek a podmínky udržení míru. Svými výzkumy v této oblasti mimoděk přispěl k rozvoji teorie fraktálů. Jak?

JAK JE TA HRANICE, SAKRA, DLOUHÁ?

Jedna ze základních Richardsonových myšlenek ohledně pravděpodobnosti vzniku válečného konfliktu mezi dvěma státy byla, že závisí na délce společné hranice. Co potřeboval znát k ověření této myšlenky? No ano, délky hranic mezi státy. Žádný problém, řeknete si. Zřejmě i Richardson si pomyslel něco jako *no problem* a z tehdy dostupných mapových zdrojů a encyklopedií začal zjišťovat délky hranic. Záhy poznal, že ohledně bezproblémovosti se zmýlil. Proč? Protože uváděné délky hranic se velmi, opravdu velmi, v různých zdrojích lišily. Dva příklady za všechny (dle [4]): Délka hranice mezi Španělskem a Portugalskem byla uváděna v rozmezí 987 km až 1 214 km, tedy rozpětí uváděných hodnot 227 km. Délka hranice mezi Nizozemím a Belgií v rozmezí 388 km až 449 km, tedy rozpětí 61 km.

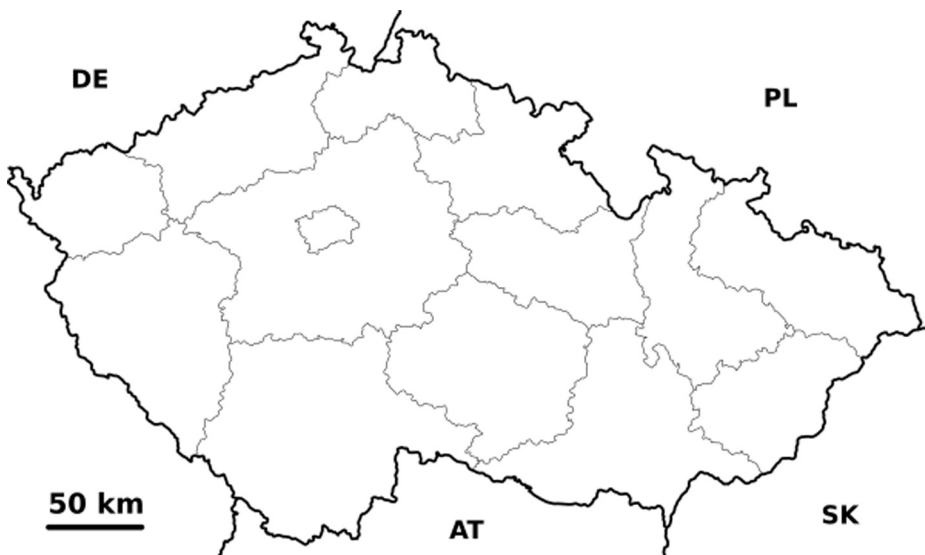
Richardsonovi bylo jasné, že tyto rozdíly nevznikly samo sebou a jako zvědavý vědec se pokusil záhadě přijít na kloub. Řešení problému je známo pod názvem **coastline paradox** (v překladu paradox pobřežní linie). O co jde? Pokračujme.

PŘÍPRAVA ZDROJOVÉ MAPY

Pro účely experimentování potřebujeme libovolnou mapu ideálně uloženou v nějakém vektorovém grafickém formátu, abychom měli možnost si ji libovolně zvětšit a vytisknout bez ztráty kvality a ostrosti hranic.

Jen ve stručnosti – pokud je použit vektorový grafický formát, obrázek není uložen bod po bodu, po pixelech, ale je rozložen na křivky (ano, pomocí diferenciální geometrie) a jako křivky, resp. jejich rovnice, je uložen. Při zobrazení se body obrazu nejprve spočítají a pak zobrazí. Odpadá nepříjemný problém tzv. pixelizace (tj. těch „ošklivých kostek“), která vzniká zvětšováním bitmapové grafiky, např. fotografie.

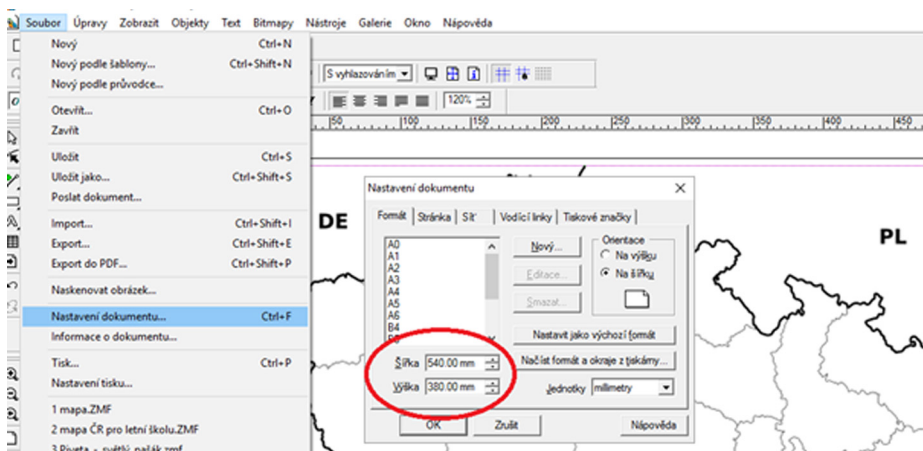
Pro potřeby Letní školy byla použita mapa České republiky dostupná na internetu [3]. Původně byla měření prováděna mimo jiné s mapou Velké Británie, ale jsme nějací vlastenci, ne?



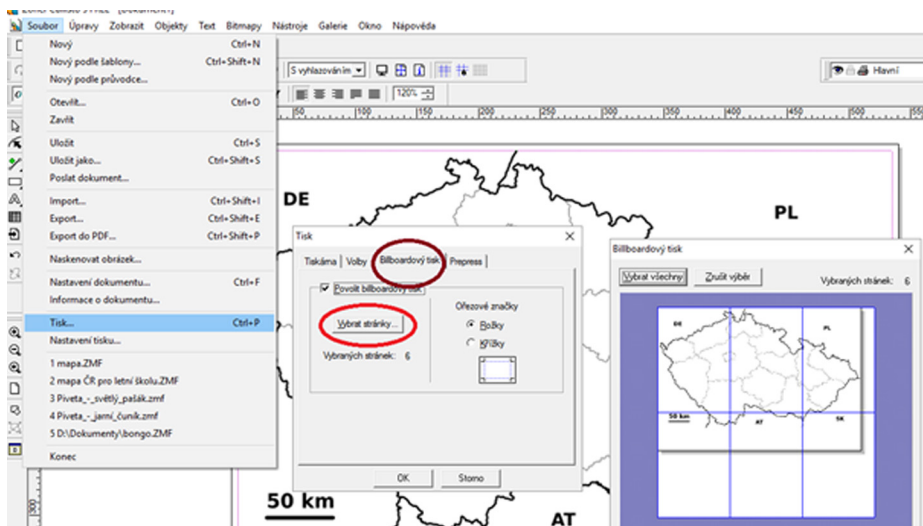
Obr. 2: Česká republika (dle [3])

Mapu je třeba upravit (tj. zvětšit) v nějakém grafickém editoru a vytisknout. Konkrétně byl použit freewarový editor Zoner Callisto 5, který je na školách běžně přítomen. Pokud ne, lze ho stáhnout na <http://www.callisto.cz>. Velikost mapy byla upravena na 540×380 mm, aby šla rozumně vytisknout.

Výhodou Zoner Callista je možnost vytištění i takto velkého dokumentu pomocí tzv. billboardového tisku. Dokument se vytiskne na klasické stránky A4 včetně značek pro ořez a pro slepení.



Obr. 3: Nastavení velikosti stránky s mapou



Obr. 4: Nastavení billboardového tisku

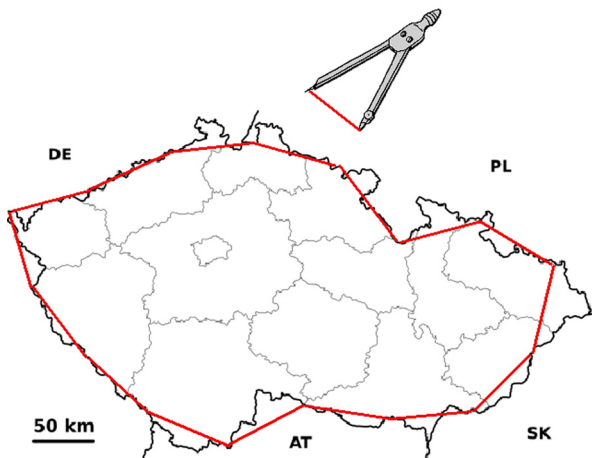
ZMĚŘME DÉLKU HRANICE

Teď nás čeká nejpracnější část – je třeba změřit délku hranice. Podél hranice budeme postupně přikládat různé dlouhá měřítka r a pečlivě si poznamenejme, kolik (celých) se nám jich podaří připojit (N). Délka hranice určená touto metodou je:

$$L(r) = Nr$$

Didaktické poznámky k měření:

- Pro přikládání délky použijeme kružítko



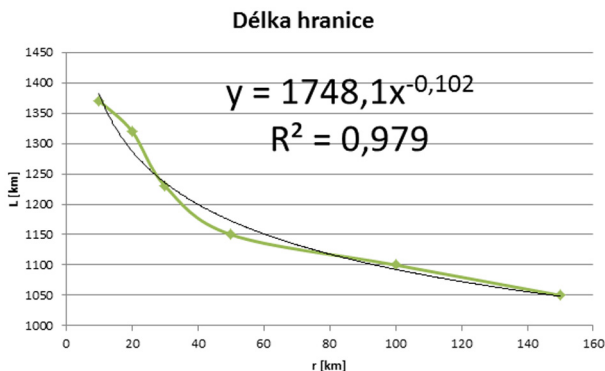
Obr. 5: Měření délky hranice

Tabulka 1: Změřené hodnoty

r [km]	Rozevření kružítko [cm]	N	$L = N \cdot r$ [km]
150	16,8	7	1 050
100	11,2	11	1 100
50	5,6	23	1 150
30	3,4	41	1 230
20	2,2	66	1 320
10	1,1	137	1 370

- Zkuste, zejména středoškoláky, přesvědčit, aby si pořídili a přinesli kružítko
- Čísla v tabulce 1, platí, pokud použijete pro tisk mapy výše uvedené hodnoty. Pokud budete mít mapu větší, menší či úplně jinou, je třeba přepočítat podle měřítka mapy. Na naší mapě je znázorněna délka 50 km (při použitém nastavení velikosti má délku 5,6 cm), takže délkové násobky a díly jsou násobky délky této úsečky

Uvedeným postupem získáme graf na obrázku 7.



Obr. 7: Závislost délky hranice na přiloženém měřítku

Didaktické poznámky:

- Ukázkou lze použít k demonstraci skutečnosti, že i bez znalosti vysoké matematiky lze z Excelu čistě uživatelským způsobem získat zajímavé výstupy.
- Jelikož žáci obvykle nebývají seznámeni se statistikou na potřebné úrovni, o spolehlivosti R lze alespoň říct, že čím je blíže hodnotě 1, tím získaná rovnice lépe odpovídá naměřeným datům. Jako demonstraci lze proložit data třeba lineárně a všimnout si, jak spolehlivost klesá.

Zpracováním dat jsme získali vzorec:

$$L(r) = 1748,1r^{-0,102}$$

Použijeme ho pro odhad skutečné délky hranice. Lehce problematická je správná volba měřítka r . Pokud zvolíme příliš velkou hodnotu, délka hranice výjde výrazně menší, než skutečnost. Pokud zvolíme příliš malou hodnotu (třeba milimetry), hodnota bude příliš velká. Zkusme vypočítat délku hranice s měřítkem $r = 100 \text{ m} = 0,1 \text{ km}$.

$$L(r) = 1748,1 \cdot 0,1^{-0,102} \text{ km} \doteq 2211 \text{ km}$$

Didaktické poznámky:

- Skutečná délka hranice je 2326,643 km, tedy o cca 115 km víc, než jsme spočítali. Proč? Státní hranice je velmi klikatá a i při měřítku 10 km zůstala spousta detailů nepostihnuta. Vzhledem k metodě měření pomocí kružítko je zjemnění velmi těžko prakticky realizovatelné. Proto ani získaný vzorec není přesný.

- Lze položit otázku, jakou hodnotu měřítka máme zvolit, aby délka hranice vyšla z našeho vzorce správně, tedy vyřešit rovnici:

$$2\,326,643 = 1\,748,1r^{-0,102}$$

Středoškolsky běžným řešením získáme hodnotu $r = 0,06$ km, tedy 60 m.

CO ODVODIL SÁM RICHARDSON?

Richardson pochopitelně provedl daleko víc měření a zřejmě i pečlivějších. Podrobným rozбором výsledků se dopracoval k rovnici:

$$L = N(r)r^D$$

Řekněme, že tvar rovnice je ve shodě s naším výsledkem. Zajímavé na tom je zjištění, že délka závisí na jakési konstantě D . Sám Richardson nevěděl, proč tomu tak je a nevěděl ani, jaký je význam oné konstanty.

Význam konstanty D objasnil až v roce 1967 Benoit Mandelbrot, zakladatel fraktální geometrie. Ve svém článku *How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension* ukázal, že konstanta D souvisí s tzv. fraktální dimenzí.

Téma fraktálů, fraktální dimenze a jak se vypočítá, je ovšem téma na samostatný článek. Zájemce odkazují např. na [4].

ZÁVĚR

Cílem práce bylo seznámit čtenáře se zajímavou úlohou, která je se žáky na školách proveditelná. Míra vysvětlovaných detailů se liší dle stupně školy. Na základní škole nebudeme počítat exponenciální rovnici, ale příprava mapy v grafickém editoru jistě zvládnutelná je.

Dále bych zdůraznil výraznou mezioborovost úlohy. A pěstování mezioborových vztahů je jedna z manter současného školství. A dle mého názoru jedna z mála smysluplných. Dotýkáme se oborů:

- Matematika – funkce, exponenciální rovnice, práce s kružítkem
- IVT – vektorová grafika, vyhledání vhodné mapy na internetu, práce s grafickým editorem, jednoduchá i pokročilá práce s tabulkovým procesorem
- Zeměpis – práce s mapou, práce s měřítkem, hledání informací z mapy
- Dějepis – historie diskutovaného objevu a motivace k němu
- A ještě jednou matematika – seznámení se s dalším konkrétním matematikem a s výsledkem jeho práce. Mimochodem, přemýšleli jste někdy o tom, s kolika jmény matematiků se žáci během studia potkají ve srovnání třeba se jmény fyziků?

Byl bych rád, kdybyste si z příspěvku něco konkrétního odnesli, ať už pro vás osobně a nebo do výuky pro vaše žáky. Napadnou-li vás k tématu jakékoliv připomínky, dobré či špatné, neváhejte se o ně se mnou podělit na jakoubek.stanislav@centrum.cz. Děkuji.

LITERATURA

- [1] Autor neuveden. *Kvakeři* [online]. [cit. 26. 10. 2016]. Dostupný na WWW: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Kvake%C5%99i>
- [2] Autor neuveden. *Lewis Fry Richardson* [online]. [cit. 26. 10. 2016]. Dostupný na WWW: https://cs.wikipedia.org/wiki/Lewis_Fry_Richardson
- [3] Autor: Caroig – Vlastní dílo, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2679920>
- [4] Jakoubek, S.: *Richardsonův efekt* [online]. [cit. 26. 10. 2016]. Dostupný na WWW: http://physics.ujep.cz/~mlisal/nm_2/sjakoubek
- [5] NOAA – NOAA PRESENTATION. *Wikipedia.cz* [online]. [cit. 26. 10. 2016]. Dostupný na WWW: https://cs.wikipedia.org/wiki/Lewis_Fry_Richardson#/media/File:Lewis_Fry_Richardson.png
- [6] ÚT AV ČR. *Richardsonovo číslo* [online]. [cit. 26. 10. 2016]. Dostupný na WWW: <http://www.it.cas.cz/modelovani/cesky/princip/Richardson.htm>

GRAVITAČNÍ VLNY

Štěpán Kolář

„Nejkrásnější a nejhlubší pocit, jaký může člověk zažít, je poznat tajemno. To je základním principem náboženství, stejně tak jako veškerého seriózního úsilí v umění a ve vědě.“ Albert Einstein

Abychom mohli vysvětlit pojem gravitační vlny, je potřeba se nejprve zmínit o jiných důležitých pojmech, konkrétně o Einsteinově teorii relativity a černých dírách.

1 TEORIE RELATIVITY

V běžném životě si pro popis okolního světa většinou vystačíme s newtonovskou mechanikou, která se učí na základní škole. Ovšem tato mechanika selhává při zkoumání malých objektů jako jsou částice, kde se používá *kvantová mechanika*, kterou se zabývat nebudeme. Při zkoumání ve vesmírného měřítka a vysokých rychlostí uplatníme právě *teorii relativity*.

S moderní teorií relativity přišel Albert Einstein, a přestože má v moderní fyzice obrovský význam, tak za ni nedostal Nobelovu cenu.¹ Teorii relativity lze rozdělit na speciální, která tu byla dříve a obecnou, která tu speciální doplňuje.

1.1 SPECIÁLNÍ TEORIE RELATIVITY

Nejprve vám ke speciální teorii relativity řeknu pouze jednu věc a to, že existuje jakási nejvyšší možná rychlost, kterou se pohybuje světlo a objekty s kladnou klidovou hmotností této rychlosti nemohou dosáhnout. Pro zamyšlení jsem si připravil úlohu „ze života“:

Úloha 1 Jedu na skateboardu rychlostí $v = 3/4 c$ a hodím před sebe hakysák, který vůči mě letí rychlostí $u = 3/4 c$. Jaká bude rychlost hakysáku w , která je vůči Aniče, sedící na lavičce?

Řešení: Podle klasické mechaniky bychom tyto rychlosti sečetli klasickým vztahem

$$w = u + v \tag{1}$$

¹ Albert Einstein dostal Nobelovu cenu za fyziku za vysvětlení *fotoelektrického jevu* o kterém se učí ve čtvrtém ročníku střední školy.

a Anička by viděla míček letící rychlostí $3/2c$. Ovšem jak jsem již řekl, rychlosti světla nelze dosáhnout, takže jsme se dostali k problému, který klasickou mechanikou nevyřešíme.

Další možnost, která vás jistě napadne je, že hakysák se vůči Aničce bude pohybovat rychlostí světla, tedy c . Ovšem těleso, které se pohybuje v jedné vztažné soustavě pomaleji než rychlostí světla, nepřekročí rychlost světla ani v jiné soustavě.

Jaké bude správné řešení? Samozřejmě musíme nějak použít teorii relativity. Konkrétně použijeme Lorentzovu transformaci pro skládání rychlostí [5], která vypadá

$$w = \frac{u + v}{1 + \frac{u}{c^2}v}. \quad (2)$$

Rychlost kterou se míček vůči Aničce pohybuje je tedy $24/25c$.

Kde se ovšem taková divná skládání rychlostí vzala? Odpověď zní jednoduše: Náš prostor a čas se nechovají přesně, tak jak jsme zvyklí. Ovšem o něco složitější bude vysvětlit, jak se vlastně chová, proto se to pokusím podat nějak stravitelně.

Již jsem řekl, že světlo se pohybuje rychlostí c , která je přibližně $3 \cdot 10^8$ m/s. Tato rychlost platí pro všechny *vztažné soustavy*, čili pro Aničku na lavičce, pro mě na skateboardu nebo pro kosmonauty na Mezinárodní vesmírné stanici. Aby byla rychlost světla zachována, musí se jí přizpůsobit veškerý okolní pohyb, z čehož plyne, to že prostor a čas v našem vesmíru se chovají jinak, než jsme zvyklí. Pro pozorovatele, který se vůči naší vztažné soustavě pohybuje (například pro Aničku vůči mě), náš čas dilatuje (prodlužuje se) a naše délky kontrahují (zkracují se). Z dilatace času a kontrakce délek plyne chování rychlostí, které jsem uvedl v příkladu. Odvození těchto vlastností je jednoduché a stačí k němu Pythagorova věta, přesto ho nebudu popisovat, ale dá se najít na internetu pod názvem „světelné hodiny“.

1.2 OBECNÁ TEORIE RELATIVITY

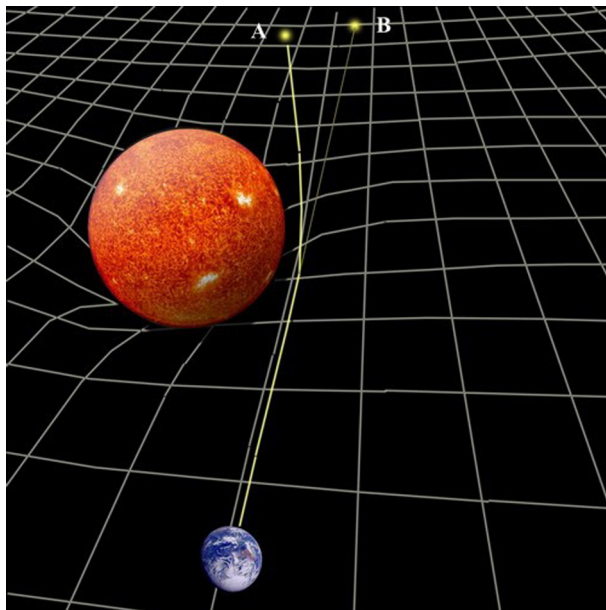
Vzhledem k tomu, že obecná teorie relativity je složitější, než ta speciální a na střední škole ji nejpravděpodobněji vůbec nepotkáte, tak jí zjednoduším pouze na základ, který bude stačit vysvětlení toho, co jsou to gravitační vlny a jak fungují.

Po uvedení speciální teorie relativity se objevil další problém, konkrétně s gravitací. Klasická mechanika předpokládá, že pokud na mě bude nějaké těleso (např.: Slunce na Zemi) působit gravitační silou a pokud se tato síla změní (Slunce zmizí), tak se účinky projeví okamžitě (Země hned přestane obíhat okolo Slunce). Speciální teorie relativity si s tímto problémem poradit neumí, protože po jejím zveřejnění Albert Einstein nad tím, jak se vlastně chová gravitace teprve přemýšlel.

V roce 1915 se mu povedlo přijít s revolučními myšlenkami, které tvoří základ obecné relativity.²

První myšlenkou je, že působení gravitace se v prostoru šíří určitou rychlostí, konkrétně stejnou, jakou se pohybuje světlo.

Druhá myšlenka, která ještě více bourá představu o našem vesmíru je to, že hmotné objekty pokrývají okolní prostor tak, že pokud se něco pohybuje v místě jejich gravitačního působení, pak právě po nejkratší možné trajektorii.



Obr. 1: Slunce pokrývá prostor ve svém okolí tak, že fotony letící z bodu B vnímáme, jakoby přiletěly z bodu A (zdroj: Time Travel Research Center)

2 ČERNÁ DÍRA

O tom, že existují černé díry snad víte a předpokládám, že máte alespoň nějakou základní představu o tom, co to vlastně je. Pokud ne, stručně připomenu, že se jedná o objekty s velkou hmotností, které svou gravitační silou přitahují vše, co se vyskytne v jejich blízkém okolí.

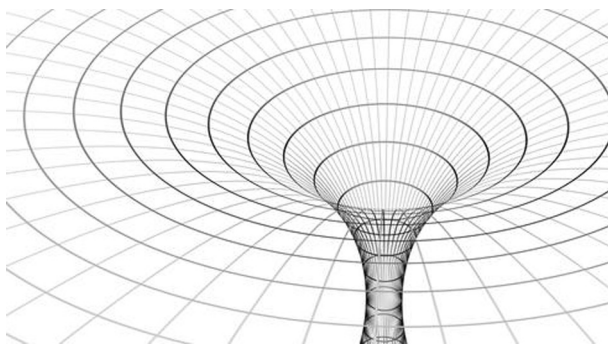
²Přestože myšlenky obecné teorie relativity měl Albert Einstein v roce 1915, na články, které se touto teorií zabývají jsme si museli ještě rok počkat. Proto se dá i letos říct, že obecná relativita slaví 100 let.

Okolo každé černé díry existuje hranice, kterou když překročíme, tak už nikdy neunikneme jejímu gravitačnímu působení. Nazýváme je *horizont událostí*. Z místa horizontu událostí se nepodaří uniknout ani světlu.

Ti z vás, kteří znají seriál Červený trpaslík si jistě vzpomněli na epizodu, ve které lodní počítač říká jednomu členu posádky:

„Víš, s černou dírou se to má tak, že jejím určujícím rysem je černá barva. A s vesmírem se to má tak, že barva vesmíru, základní barva vesmíru, je černá. Tak jak ji mám asi vidět?“

My však díky obecné relativitě umíme černou díru ve vesmíru najít, protože světlo v jejím okolí, ale dostatečně daleko od ní, mění svojí trajektorii.



Obr. 2: Schématické znázornění pokřivení prostoru černou dírou (zdroj: Shutterstock.com)

Existuje také kvantový popis černých děr, ale do toho se raději pouštět nebudeme. Použijeme pouze popis, pomocí již zmíněné obecné relativity. Ta nám říká, že gravitační působení černých děr je vlastně pokřivení časoprostoru, který je díky gravitačnímu působení výrazně protažen.

3 CO JSOU GRAVITAČNÍ VLNY

Zatím jsem mluvil o natahování a smršťování prostoru, ale pokud lze pokrřivovat takto, je tu zajímavá otázka, zda se může natahovat a zkracovat tak, aby se vlnil? Možná je zbytečné tuto otázku pokládat, protože přednáška se jmenuje gravitační vlny, proto jistě tušíte, že to lze a že takováto pokrřivení mohou být způsobena gravitací.

Aby gravitační vlny vůbec vznikly, potřebujeme nějaký impuls. Existuje více způsobů vzniku: jak se ještě zmíním, tak jednou z příčin vzniku byl *velký třesk*. Nás teď bude zajímat takový impuls, který bude pokud možno co největší, konkrétně srážka dvou hmotných těles, nejlépe dvou černých děr.

Srážku dvou černých děr si ukážeme ve videu <https://youtu.be/dyPJX6HURtI>. Na videu si můžeme všimnout, že okolo černých děr je prostor protažený. Jakmile se černé díry přibližují k sobě, dochází k napínání prostoru mezi nimi. Ve dvou místech se prostor naopak smršťuje, protože je sem napínaný prostor vytlačován. Zde jsou gravitační síly obou černých děr téměř vyrovnány a jsou tu dva body, kde jsou vyrovnány úplně. Kdybychom byli v bodě, kde jsou gravitační síly vyrovnány, nespadli bychom ani do jedné z těchto černých děr a to do doby, než se spojí. Po spojení černých děr se změní gravitační pole a místa, kde se síly vyrovnávaly zmizí. Pokud by se gravitace šířila nekonečnou rychlostí, tato místa zmizela okamžitě bez dalších následků. Ve skutečnosti je namačkaný prostor potřeba někam vytlačit, proto se začne šířit a zvlní tak své okolí.

4 JAK POZOROVAT GRAVITAČNÍ VLNY

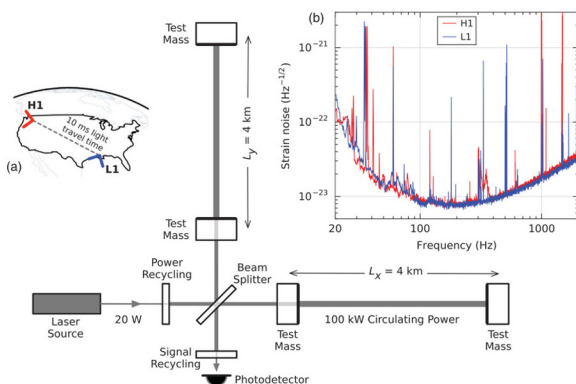
Pokud mluvíme o pozorování, tak první co nás napadne, že lze pozorovat pouhým okem. Pozorují se takto vlivy gravitačních vln?

Naštěstí je odpověď ne, protože pokud by byl jejich vliv tak markantní, že by se dal vidět, způsobilo by to řadu problémů. Napínání prostoru totiž způsobuje prodlužování vzdáleností a jeho stlačování naopak vzdálenosti zkracuje. Představte si, že se bude prodlužovat a zkracovat délka nějaké tyče, její materiál takové deformace nemusí vydržet a tyč pak praskne.

Z odpovědi tedy vyplývá, že gravitační vlny, které se u nás objevily byly malé, ale není vyloučeno, že mohou být větší, k tomu potřebujeme mít hmotnější černé díry, nebo bychom museli být blíže u srážejících se černých děr.

Na detekci gravitačních vln je zapotřebí tedy nějaký experiment. Zajímavostí je, že stejným experimentem, jakým gravitační vlny pozorujeme, jsme dokázali platnost speciální teorie relativity, respektive, že se světlo šíří konstantní rychlostí ve všech směrech nezávisle na vztažné soustavě.

Z laseru se pošle světelný paprsek na polopropustné zrcadlo, které je vůči laseru zkoseno o 45° . Na polopropustném zrcadle se paprsek rozdělí na dva paprsky, které putují do na zrcadla 1 a 2. Tato zrcadla jsou od polopropustného zrcadla ve stejné vzdálenosti. Naše planeta se ovšem pohybuje okolo Slunce, to se pohybuje okolo středu naší Galaxie a tak dál. Pokud by se světlo nepohybovalo ve všech soustavách stejnou rychlostí, na každé zrcadlo by dopadl paprsek v jinou dobu. Vzhledem k tomu, že se světlo pohybuje konstantní rychlostí, fotony na obě zrcadla dopadají ve stejnou dobu. Takto vypadá klidový stav. Pokud k nám dorazí gravitační vlna, na jedno ze zrcadel dopadnou fotony dřív, protože se změní vzdálenost mezi tímto zrcadlem a polopropustným zrcadlem. Abychom dokázali tyto změny pozorovat, tak za polopropustným zrcadlem bude umístěn detektor, který zkoumá amplitudy laserových paprsků.



Obr. 3: Schéma experimentu LIGO, který slouží k detekci gravitačních vln (autor: Abbott, B. P. a kol.)

4.1 OBJEV GRAVITAČNÍCH VLN

Gravitační vlny byly objeveny poprvé nepřímo v 70. a 80. letech, při pozorování binárního pulsaru PSR 1913+16. Složky tohoto pulsaru se vzájemně přibližovaly v souladu s obecnou teorií relativity. Pulsar vyzařoval energii v podobě gravitačních vln, které jsme bohužel nepozorovali.

Za výzkum tohoto pulsaru dostali v roce 1993 Russel A. Hulse a Joseph H. Taylor Nobelovu cenu za fyziku [6, 1].

Přímým pozorováním byly objeveny až loni (resp.: 14. září 2015). Na zveřejnění objevu jsme si museli počkat do 11. února letošního roku. Důvod, proč jsme čekali na zveřejnění objevu je, že se měření pečlivě překontrolovalo. Tyto vlny způsobila srážka, která se stala před více, než miliardou let. Druhá vlna přišla 26. prosince 2015 a její detekce byla zveřejněna 15. června. Obě vlny zaznamenal experiment LIGO.

5 VÝZKUMNÁ ZAŘÍZENÍ

Experiment LIGO (obr. 3) se nachází ve spojených státech a má dva interferometry, které leží každý na opačné straně spojených států. Jeden je v Livingstonu a druhý v Hanfordu. Větší počet detektorů potřebujeme pro to, abychom určili, že se opravdu jedná o gravitační vlny a ne o šum. Původně byl experiment v provozu mezi lety 2002 a 2010, kdy bohužel k žádné detekci nedošlo. Protože jsme potřebovali zvýšit jeho citlivost od roku 2010 se vylepšoval a byl znovu spuštěn v září 2015 (všimněte si, že k oběma objevům došlo v relativně krátké době, to může znamenat, že srážky černých děr jsou ve vesmíru častým jevem) [1].

LIGO není jediný experiment, který zkoumá gravitační vlny, v Evropě máme Virgo, které s Ligem spolupracuje. Bohužel Virgo zatím žádné gravitační vlny neobjevilo.

Abychom mohli lépe získávat informace o okolním vesmíru, budou detektory přibývat. Virgo, které má zatím dva detektory plánuje vytvořit třetí detektor, díky čemuž budeme moci určit směr, ze kterého vlna přišla. Do projektu LIGO se plánuje zapojit Indie, která chce vlastní observatoř pojmenovat India LIGO, to umožní také určit směr zdroje vln. V Japonsku se chystá projekt KAGRA [7].

Mluvil jsem o tom, že gravitační vznikly i při velkém třesku. Jistě by bylo zajímavé tyto vlny také nějak pozorovat, to ale znamená, že budeme potřebovat mnohem větší detektor, než jsme dosud měli k dispozici a kde bychom jej měli postavit?

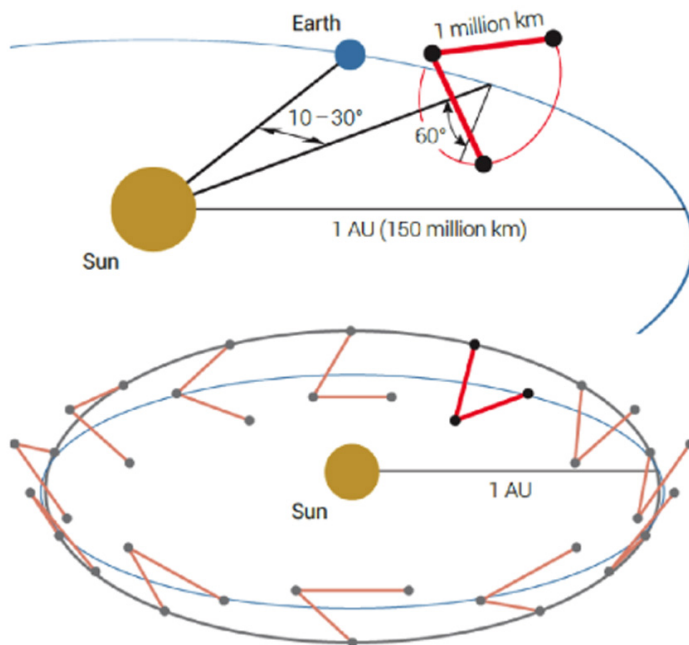
Nelepší bude mimo Zemi, kde zároveň budou eliminovány seismické otřesy. Projekt, který měl být na oběžné dráze okolo Slunce se jmenuje LISA a na jeho výstavbě se společně podílely ESA a NASA. LISA měly být tři družice, které by mezi sebou tvořily rovnostranný trojúhelník o délce ramen 5 000 000 km. Každá družice vysílala laserový paprsek na ty ostatní. Bohužel Američané od Lisy odstoupili a Evropa sama financování projektu neutáhla.

Místo Lisy byl tedy spuštěn nový, čistě evropský projekt, který se jmenuje NGO, ale přezdívá se mu eLISA. U projektu NGO byla potřeba snížit náklady na výstavbu projektu, toho bylo dosaženo díky zkrácení vzdáleností mezi sondami na 1 000 000 km, mezi dvěma sondami byl odebrán paprsek a úhel trojúhelníku se sevřel, takže detektor připomíná písmeno V. Celá soustava je nakloněná vůči ekliptice o 60° .

Dne 3. prosince 2015 úspěšně odstartovala sonda LISA Pathfinder, která testuje zařízení pro projekt eLISA [2, 3].

Tabulka 1: Porovnání projektů NGO a LISA (zdroj: Aldebaran.cz)

NGO	LISA
Formace trojúhelníku s jednou mateřskou a dvěma dceřinými sondami	Formace trojúhelníku se třemi identickými sondami
Vzdálenost sond 10^6 km	Vzdálenost sond $5 \cdot 10^6$ km
Jednoduchý Michelsonův interferometr (4 základny)	Mnoho konfigurací interferometrů, až 6 základen
Přímé měření amplitudy	Přímé měření amplitudy
Nepřímé měření polarizace z tvaru dráhy	Přímé a trvalé měření polarizace
Doba provozu: 2 roky, možné prodloužení na 5 let	Doba provozu: 5 let, možné prodloužení na 10 let



Obr. 4: Sondy experimentu NGO obíhají kolem společného těžiště. Celá soustava pak obíhá okolo Slunce (zdroj: Glasgow University Magazine)

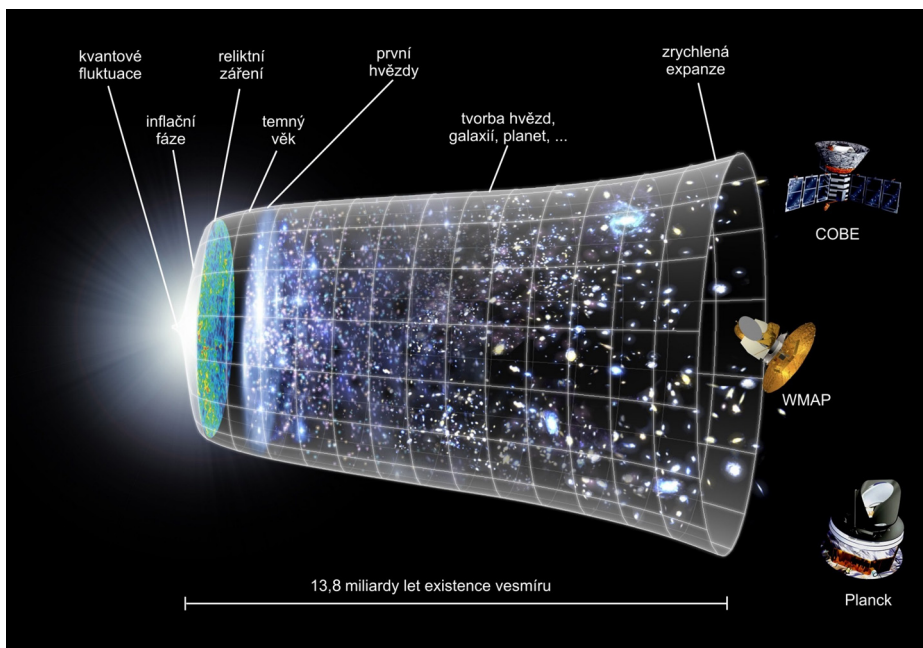
6 ZÁVĚREM O POČÁTKU VESMÍRU, ANEB JAK POZOROVAT VELKÝ TŘESK

Projekt LISA nám měl umožnit pozorovat počátky vesmíru, tento účel bude plnit NGO. Zatím jsme byli schopni pozorovat vývoj vesmíru pomocí *reliktního*³ *elektromagnetického záření*⁴, konkrétně pomocí mikrovln. Reliktní elektromagnetické záření nám však umožnilo pozorovat pouze do doby 400 000 po velkém třesku. V té době se oddělilo elektromagnetické záření od ostatní hmoty (obr. 5).

My bychom ovšem rádi viděli dál. To nám umožní právě *reliktní gravitační vlny*, díky nimž lze vidět inflační fázi (obr. 5), při které došlo ke prudké expanzi hmoty ve vesmíru a probíhala v době 10^{-35} s. Existuje však spousta teorií o tom, jak inflační fáze probíhala a jak dloho trvala, o kterých se zatím lze jen dohadovat.

³Reliktní záření pochází z doby vzniku daného záření.

⁴Elektromagnetické záření je zobecněný pojem pro světlo, ale nemusí se jednat pouze o světlo z viditelného spektra, může se jednat třeba o gama záření nebo infračervené záření.



Obr. 5: Vývoj vesmíru s popisem jeho jednotlivých částí a sondy, zabývající se pozorováním vývoje vesmíru (zdroj: ESA)

LITERATURA

- [1] Hron, M.: Gravitační vlny potvrzeny, In: *Astronomický informací server astro.cz*. (12. 2. 2016). <http://www.astro.cz/clanky/vzdaleny-vesmir/gravitacni-vlny-potvrzeny.html>, (cit. 19. 8. 2016).
- [2] Kulhánek, P.: *LISA je mrtvá, eLISA skomírá, nadeje umírá?* http://www.aldebaran.cz/bulletin/2013_19_lis.php, (cit. 4. 8. 2016).
- [3] Podolský, J.: Gravitační vlny poprvé zachyceny: GW150914 ze srážky černých děr. In: *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*. 61 (2016), s. 89–105. ISSN 00322423.
- [4] Reichl, J., Všeticka, M.: *Encyklopedie fyziky, Intenzita gravitačního pole*. <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/57-intenzita-gravitacniho-pole>, (cit. 18. 7. 2016).
- [5] Semerák, O.: *Speciální teorie relativity*. <http://utf.mff.cuni.cz/semerak/STR.pdf>, (cit. 9. 7. 2016).

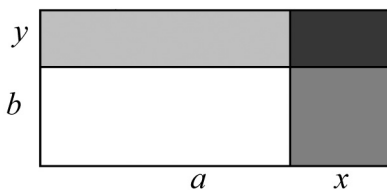
- [6] *The Nobel Prize in Physics 1993*. http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1993/, (cit. 3. 8. 2016).
- [7] Vachtl, P.: *Gravitacní vlny byly zachyceny podruhé*. <http://www.rozhlas.cz/leonardo/vesmir/zprava/1624883>, (cit. 4. 8. 2016).

ZKOUMÁNÍ CELÝCH ČÍSEL

Jan Kopka

TROCHU HISTORIE

Řekněme si něco málo z historie budování pojmu záporného čísla. Začneme v antickém Řecku. Matematika měla před tímto obdobím aritmetický charakter. V Řecku pak byla matematika geometrizována. U čísel se vychází z geometrické interpretace čísla. Číslo představuje délku, obsah nebo objem. A protože úsečka nemůže mít zápornou délku, neexistovala v té době idea záporného čísla. Sčítání při tomto geometrickém chápání představovalo skládání geometrických objektů a odčítání jejich odebírání. Při úpravě algebraických výrazů pracovali matematici s přidávanými i odebíranými čísly. Při tom vznikaly situace, že dvě odebíraná čísla bylo potřeba mezi sebou násobit. Ukažme si tuto situaci v geometrické interpretaci.



Obr. 1

Na obr. 1 je velký obdélník o stranách a a b . Pokud stranu a zmenšíme o x a stranu b o y , dostaneme nový obdélník o stranách $a - x$ a $b - y$. Vyjádříme obsah tohoto malého obdélníka pomocí obdélníka původního. Toto vyjádření je vlastně vtěleno do následující známé formule:

$$(a - x)(b - y) = ab - ay - xb + xy$$

Při geometrické interpretaci to znamená, že malý (bílý) obdélník dostaneme z velkého, když od něj odebereme obdélníky ay a xb . Protože jsme však černý obdélník xy odebrali dvakrát, musíme ho zase jednou vrátit. To představuje:

odebrat x krát odebrat y znamená přidat xy , (!!!)

neboli v naší současné symbolice

$$(-x) \cdot (-y) = +xy.$$

Při úpravách tedy pracovali Řekové se zápornými čísly pouze jako s operátory, tzn. jako s příkazy. Ve výsledku se jim však záporné číslo nikdy nevyskytlo. Zápornou mnohost neuznávali.

V Číně kolem počátku našeho letopočtu se k ideji záporného čísla dostali pomocí účetnické praxe. Úředníci císaře museli zapisovat majetky i dluhy. Vyřešili to tak, že majetky zapisovali červeně a dluhy černě. Černě psaná čísla tak představují čísla záporná. Existovala tedy představa kladného čísla a záporného čísla. V oblasti červených čísel uměli sčítat a odčítat, v oblasti černých čísel také uměli sčítat a odčítat a uměli dokonce sčítat a odčítat červené a černé číslo. Součin záporných čísel při svých výpočtech činští úředníci nepotřebovali. Bylo by to znamenalo

$$\text{dluh krát dluh} = \text{majetek}. \quad (1)$$

Záporná čísla již samostatně existují, jsou však na úrovni předmětného myšlení. Je to zřejmě podobná situace, jako když dítě chápe, co jsou *tři bonbóny*, nechápe však zatím, co je *tři*.

V Indii v 7. století vycházela představa čísla také z účetnické praxe. Pojem dluh a majetek, který používají obdobně jako v Číně, však již překračuje úroveň předmětného myšlení. Tyto pojmy používají jako samostatně existující objekty. Oni již např. vyslovují výše uvedené pravidlo (1), a přitom chápou pojmy majetek a dluh abstraktně a s realitou je spojuje pouze název.

Poslední zdolání překážek při vytváření představy záporných čísel se podařilo evropským matematikům, ale až v 17. a 18. století. I zde se nejprve vycházelo z finanční matematiky. Při práci se zápornými čísly se však začaly velmi brzy objevovat paradoxy. Ukažme jeden z nich.

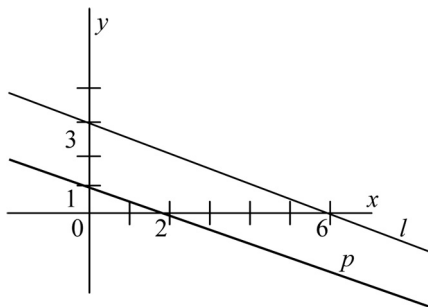
Pokud vezmeme dvě různá nenulová přirozená čísla x a y a vydělíme $x : y$ a $y : x$, dostaneme vždy různé výsledky. Např. vezmeme-li čísla 2 a 3, dostaneme $2 : 3$ a $3 : 2$. Číslo *dvě třetiny* je různé od čísla *jedna a půl*. Pokud však začneme uvažovat i čísla záporná, pak uvedené tvrzení o různosti výsledků neplatí. Např. $-2 \neq 2$ a přitom $(-2) : 2 = 2 : (-2)$. Výsledek je v obou případech *minus jedna*. Takovéto situace vedli matematiky k tomu, že se zápornými čísly je třeba zacházet velmi opatrně a že je třeba dávat velký pozor při zobecňování zákonitostí z kladných čísel na všechna čísla celá.

Není divu, že i dnešní žáci mají ve škole při práci se zápornými čísly velké těžkosti. Především skutečnost, že součin záporných čísel dá číslo kladné, je pro ně těžko pochopitelná. Učitelé to často obcházejí tak, že řeknou: „*Pamatujte si, že součin záporných čísel je číslo kladné*“, načež následuje procvičování. Někteří to dokonce formulují takto: *Pamatujte si, že minus krát minus dá plus*. I někteří didaktici matematiky říkají, že tento fakt by se měl dětem oznámit a nijak

nekomentovat. Před lety, v době tzv. modernizace matematiky, se však objevily snahy uvedený fakt dětem nějakým způsobem přiblížit. Nyní ukážeme několik možných způsobů.

Chceme-li na kartézském grafu ukázat např. součin $2 \cdot 3$, můžeme to udělat následovně:

Napišme $2 \cdot 3 = v$. Tento vztah si upravíme následovně: $\frac{2}{1} = \frac{v}{3}$. Znázornění je ukázáno na obr. 2.

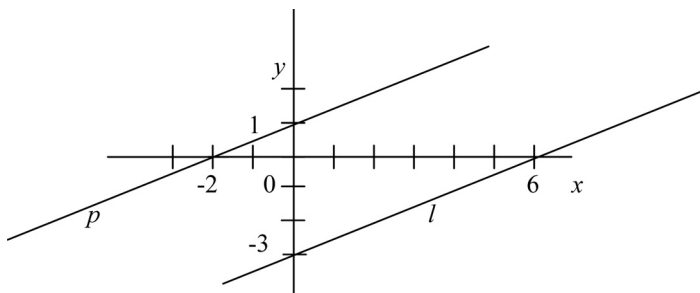


Obr. 2

Na ose x jsme vyznačili číslo 2 a na ose y číslo 1. Těmito body jsme sestrojili přímkou p . Dále jsme na ose y vyznačili číslo 3 a jím jsme vedli přímkou l rovnoběžnou s přímkou p . Přímka l protíná osu x ve výsledku násobení, tj. v bodě 6.

Podstatou konstrukce je podobnost trojúhelníků 021 a 063. V těchto trojúhelnících skutečně platí $\frac{2}{1} = \frac{6}{3}$.

Nyní můžeme uvedenou konstrukci aplikovat na součin $(-2) \cdot (-3)$. Vztah $(-2) \cdot (-3) = v$ přepíšeme $\frac{-2}{1} = \frac{v}{-3}$. Grafické znázornění je na obr. 3.



Obr. 3

Tentokrát přímka p prochází na ose x bodem -2 a na ose y bodem 1 . Bodem -3 na ose y s ní vedeme rovnoběžku l . Přímka l protíná osu x opět ve výsledku násobení a tím je bod 6 . To tedy znamená, že $(-2) \cdot (-3) = 6$. Podstatou znázornění je opět to, že trojúhelník $(-2)01$ je podobný s trojúhelníkem $60(-3)$.

Výše uvedený způsob vysvětlení, proč je součin záporných čísel číslo kladné, je použitelný pouze tehdy, pokud studenti znají vztah „být podobný“ mezi trojúhelníky.

Jiný možný způsob spočívá v tom, že využijeme problém z antického Řecka, který je v geometrické interpretaci znázorněn na obr. 1.

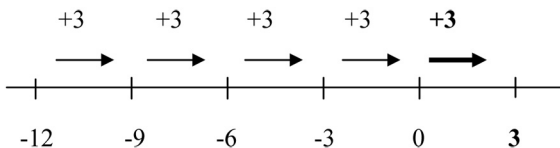
Při dalším způsobu využijeme číselnou osu. Budeme postupně násobit např. číslo -3 klesajícími celými čísly. Dostaneme:

$$4 \cdot (-3) = -12, \quad 3 \cdot (-3) = -9, \quad 2 \cdot (-3) = -6, \quad 1 \cdot (-3) = -3, \quad 0 \cdot (-3) = -3$$

Pokud má tato vlastnost „růst výsledků“ zůstat zachována, musí platit, že

$$(-1) \cdot (-3) = 3$$

Dobře vynikne uvedená vlastnost, pokud použijeme číselnou osu (viz obr. 4).



Obr. 4

Další možnost spočívá v tom, že využijeme distributivní zákon, který ve struktuře celých čísel platí.

Tento zákon říká, že pro každé celé číslo x, y, z platí: $x(y + z) = xy + xz$.

Pro náš případ to znamená:

$$0 = (-1) \cdot 0 = (-1)(1 - 1) = (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = -1 + (-1) \cdot (-1)$$

Protože uvedený součet je 0, musí platit, že $(-1) \cdot (-1) = 1$.

Toto je způsob, který navrhoval prof. Petr Vopěnka.

Tím končí první historicko-didaktická část. V další části se už budeme zabývat zkoumáním.

JEDNO ZKOUMÁNÍ Kladných celých čísel

Zkoumání v širším slova smyslu většinou probíhá následujícím způsobem:

Zadaná situace – experimentování – vyslovení hypotézy – ověření hypotézy – důkaz hypotézy – přejmenování hypotézy na matematickou větu.

V centru zkoumání matematické situace je vyslovení hypotézy. Je to výrok, o kterém si myslíme, že je pravdivý, ale který jsme zatím nedokázali. Při jeho ověřování se může ukázat, že neplatí nebo že ho budeme muset trochu pozměnit.

Uvedli jsme, že v centru této cesty stojí vyslovení hypotézy. V této části ukážeme zajímavé zkoumání celých čísel, v jehož rámci vyslovíme několik hypotéz. Toto zkoumání tak povede k vytvoření určité miniteorie. Čtenář si pomocí tohoto článku může prohloubit svoji představu o tom, jak se pracuje v matematice.

Problém 1 *Součet za sebou jdoucích kladných celých čísel.* Inspiraci autor našel v knížce [3].

Zkoumejte, která kladná celá čísla můžeme vyjádřit jako součet za sebou jdoucích kladných celých čísel? Např.: $7 = 3 + 4$ a $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$.

Řešení: Protože o uvedené problematice prozatím nic nevíme, začneme experimentováním. Jsou možné minimálně dva způsoby, jak postupovat:

a) *První způsob* představuje strategii *cesta zpět*. Vezmeme nejprve za sebou jdoucí dvojice, pak trojice, pak čtveřice atd. kladných celých čísel a vypočítáme jejich součty. Např.:

$$\begin{array}{lll} 1 + 2 = 3 & 1 + 2 + 3 = 6 & 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \\ 2 + 3 = 5 & 2 + 3 + 4 = 9 & 2 + 3 + 4 + 5 = 14 \\ 3 + 4 = 7 & 3 + 4 + 5 = 12 & 3 + 4 + 5 + 6 = 18 \dots \end{array}$$

Toto experimentování nám ukazuje, že celá čísla 3, 5, 7, 6, 9, 12, 10, 14, 18 můžeme zapsat jako součet za sebou jdoucích čísel. Pokud je uspořádáme podle velikosti, dostaneme posloupnost

$$3, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 14, 18, \dots$$

a můžeme objevit zákonitost, která čísla v posloupnosti jsou a která nikoliv. Ponecháme čtenáře, aby v tomto způsobu zkoumání pokračoval. Poznamenejme však, že než budete zkoumat výslednou posloupnost, tak určete ještě další součty. V námi uvedené části této posloupnosti totiž určité ještě některá čísla chybí.

b) *Druhý způsob* představuje také systematické experimentování. Spočívá v tom, že budeme postupně brát podle velikosti jednotlivá přirozená čísla, tj. čísla 1, 2, 3, 4, ... a pokusíme se zapisovat je jako součet po sobě jdoucích čísel. My v dalším zvolíme právě tento druhý způsob experimentování.

Experimentování:

$1 = 0 + 1$ Neplatí, 0 není kladné číslo.

$2 =$ Nelze.

$3 = 1 + 2$ Ano.

$4 =$ Opět nelze.

$5 = 2 + 3$ Ano.

Po tomto krátkém experimentování můžeme vyslovit hypotézu:

Hypotéza 1 Sudá kladná celá čísla nelze vyjádřit jako součet po sobě jdoucích kladných celých čísel.

Pokračujme v systematickém experimentování:

$6 = 1 + 2 + 3$ Ano. $9 = 2 + 3 + 4$ Ano.

$7 = 3 + 4$ Ano. $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ Ano.

$8 =$ Nelze. $11 = 5 + 6$ Ano.

Experiment pro číslo 6 nebo 10 ukazuje, že hypotéza 1 neplatí. Každý z těchto příkladů hypotézu vyvrací. Čtenář může v experimentování ještě pokračovat. My jsme zjistili, že čísla 1, 2, 4 a 8 nelze vyjádřit ve tvaru součtu. Co jsou to za čísla? Jsou to mocniny čísla 2. Proto můžeme vyslovit další hypotézu:

Hypotéza 2 Mocniny čísla 2 nelze vyjádřit jako součet po sobě jdoucích kladných celých čísel.

Hypotézu 2 můžeme testovat např. pomocí čísla $2^4 = 16$. Zjistíme, že ani toto číslo nelze vyjádřit v požadovaném součtovém tvaru. Proto nyní ještě více věříme, že hypotéza 2 platí. Dokázat ji však v tuto chvíli neumíme. Pokud čtenář udělá ještě několik dalších experimentů, pak jistě spolu s námi dojde k závěru, že platí:

Hypotéza 3 Všechna kladná celá čísla s výjimkou mocnin čísla 2 lze vyjádřit jako součet za sebou jdoucích kladných celých čísel.

Jak dokázat hypotézy 2 a 3? V první řadě se pokusíme nalézt nějakou vlastnost, která od sebe odlišuje mocniny čísla 2 a ostatní kladná celá čísla. Pomocí takovéto vlastnosti se nám pak může podařit důkazy provést.

Z teorie dělitelnosti víme, že mocniny čísla 2 mají jediného prvočíselného dělitele a tím je číslo 2. Všichni dělitelé mocnin čísla 2 jsou proto sudá čísla s výjimkou čísla 1. Naproti tomu ostatní kladná celá čísla mají vždy alespoň jednoho lichého prvočíselného dělitele různého od čísla 1.

Příklad: Dělitelé čísla $2^5 = 32$ jsou: 32, 16, 8, 4, 2, 1. Všichni dělitelé s výjimkou čísla 1 jsou sudá čísla.

Dělitelé čísla 24 jsou: 24, 12, 8, 6, 4, 3, 2, 1. Tady je lichý dělitel různý od čísla 1. Je to číslo 3.

Máme tedy určitou vlastnost, která od sebe naše dva druhy čísel odlišuje. Přeformulujme proto pomocí této vlastnosti hypotézy 2 a 3.

Hypotéza 2a Jestliže má kladné celé číslo n pouze sudé dělitele vyjma čísla 1, pak n nelze vyjádřit jako součet po sobě jdoucích kladných celých čísel.

Hypotéza 3a Jestliže má kladné celé číslo n alespoň jednoho lichého dělitele různého od čísla 1, pak n lze vyjádřit jako součet po sobě jdoucích kladných celých čísel.

Začneme hypotézou 3a. Pokusíme se objevit ideu jejího důkazu. Další experimentování nám pomůže ukázat, jak přítomnost lichého dělitele čísla n umožní napsat toto číslo v požadovaném součtovém tvaru. Vezměme čísla, která určitě mají alespoň jednoho lichého dělitele, např. to mohou být násobky čísel 3, 5 a 7.

Násobky čísla 3:

$$1 \cdot 3 = 1 + 2$$

$$2 \cdot 3 = 1 + 2 + 3$$

$$3 \cdot 3 = \quad 2 + 3 + 4$$

$$4 \cdot 3 = \quad \quad 3 + 4 + 5$$

Násobky čísla 5:

$$1 \cdot 5 = \quad 2 + 3$$

$$2 \cdot 5 = 1 + 2 + 3 + 4$$

$$3 \cdot 5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

$$4 \cdot 5 = \quad 2 + 3 + 4 + 5 + 6$$

Obecně:

$$g \cdot 3 = (g - 1) + g + (g + 1) \quad g \cdot 5 = (g - 2) + (g - 1) + g + (g + 1) + (g + 2)$$

Násobky čísla 7:

$$1 \cdot 7 = \quad 3 + 4$$

$$2 \cdot 7 = \quad 2 + 3 + 4 + 5$$

$$3 \cdot 7 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$$

$$4 \cdot 7 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$

$$5 \cdot 7 = \quad 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$$

$$6 \cdot 7 = \quad \quad 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$$

Obecně:

$$g \cdot 7 = (g - 3) + (g - 2) + (g - 1) + g + (g + 1) + (g + 2) + (g + 3).$$

Poznamenejme, že uvedené obecné formule platí pouze tehdy, když je číslo g dostatečně velké. Pak počet sčítanců je stejný jako daný lichý dělitel a číslo g je uprostřed.

A nyní obecně: Jestliže má kladné celé číslo n lichého dělitele $(2k + 1)$, kde k je kladné celé číslo, to znamená, když n můžeme zapsat ve tvaru

$$n = g(2k + 1), \quad (2)$$

pak ale n můžeme zapsat i jako součet

$$n = (g - k) + \dots + (g - 2) + (g - 1) + g + (g + 1) + (g + 2) + \dots + (g + k) \quad (3)$$

Skutečně, jestliže sečteme výrazy (termy) na pravé straně formule (3), dostaneme výraz (term) na pravé straně formule (2). Formule (2) a (3) jsou tedy ekvivalentní.

Formule (3) představuje největší objev našeho dosavadního snažení. Říká, že číslo n , které lze zapsat ve tvaru (2), lze také zapsat jako součet $(2k + 1)$ po sobě jdoucích celých čísel, přičemž uprostřed je číslo g . Toto už téměř představuje zdůvodnění hypotézy 3a. Bohužel, ne všechny výrazy na pravé straně formule (3) musí představovat kladná čísla. Např. jestliže použijeme formuli (3) pro $n = 3, 5, 7, 10$ a 14 , dostaneme:

$$\begin{aligned} 3 &= 1 \cdot 3 = 0 + 1 + 2 \\ 5 &= 1 \cdot 5 = -1 + 0 + 1 + 2 + 3 \\ 7 &= 1 \cdot 7 = -2 + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 \\ 10 &= 2 \cdot 5 = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 \\ 14 &= 2 \cdot 7 = -1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5. \end{aligned}$$

Jestliže vezmeme např. vyjádření čísla 7 a odstraníme nulu a navíc provedeme vykrácení záporných a odpovídajících kladných čísel, dostaneme již naše požadované vyjádření pouze pomocí samých kladných čísel.

$$7 = 1 \cdot 7 = -2 + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 3 + 4$$

Ve školské matematice se obvykle říká vyrušení. Algebraici často hovoří o krácení vzhledem ke sčítání nebo vzhledem k násobení.

Nyní již máme ideu důkazu.

Důkaz hypotézy 3a: Nechť kladné celé číslo n má lichého dělitele $(2k + 1)$, kde k je kladné celé číslo. Pak n lze napsat ve tvaru (2). Nyní již víme, že n můžeme přepsat do tvaru (3).

$$n = (g - k) + \dots + (g - 2) + (g - 1) + g + (g + 1) + (g + 2) + \dots + (g + k), \quad (3)$$

kde g je také dělitelem čísla n . Jak na pravé straně formule (3) dostaneme dvě nebo více kladných celých čísel? Jestliže je v součtu číslo 0, pak ho můžeme vyškrtnout. Pokud jsou tam záporná čísla, můžeme je vykrátit s odpovídajícími kladnými čísly. Celkový součet čísel je i po vykrácení a odstranění nuly stejný, tzn. n . Kladných čísel je víc než záporných (celkový součet je kladné číslo n), a proto na pravé straně formule (3) nějaká kladná čísla zůstanou. Nemůže tam zůstat pouze jedno číslo? Nemůže. Původní počet všech čísel byl vyjádřen lichým číslem. Dáme-li nulu pryč a provedeme-li vykrácení, odstraníme lichý počet čísel. Pokud od lichého čísla odečteme liché číslo, dostaneme číslo sudé. Po vykrácení proto musí zůstat na pravé straně formule (3) sudý počet čísel, tedy nejméně dvě.

Po tomto důkazu můžeme hypotézu 3a přejmenovat na větu.

Věta 1 *Jestliže má kladné celé číslo n alespoň jednoho lichého dělitele různého od čísla 1, pak n lze vyjádřit jako součet za sebou jdoucích kladných celých čísel.*

My už teď ale víme více než říká věta 1. Víme nejen to, že požadovaný součet existuje, ale dokonce víme i jak ho vytvořit – viz formule (3). Teď již máme určité zkušenosti se zkoumanou problematikou, a proto nás může napadnout, že i obrácení věty 1 by mohlo platit.

Hypotéza 4 *Jestliže lze kladné celé číslo n vyjádřit jako součet za sebou jdoucích kladných celých čísel, pak má n alespoň jednoho lichého dělitele různého od čísla 1.*

Důkaz: Zapišme n ve tvaru $n = g_1 + g_2 + \dots + g_r$, kde $g_1, g_2, \dots, g_r$ jsou po sobě jdoucí kladná celá čísla. Uvažujme dva případy:

a) r je liché číslo,

b) r je sudé číslo.

Případ a): Číslo n zapišeme pomocí formule (3). Číslo uprostřed součtu označíme g . Skutečnost, že číslo r je liché, garantuje, že je zde prostřední člen. Pak stejně jako při našem experimentování můžeme číslo n napsat ve tvaru $n = g(2k + 1)$. Místo $(2k + 1)$ bychom samozřejmě mohli nyní psát r . Vidíme, že číslo n má lichého dělitele většího než 1, a je to číslo $(2k + 1)$.

Případ b): Nemůžeme postupovat jako v případě a), protože zde není prostřední člen. Můžeme však součet $g_1 + g_2 + \dots + g_r$ „rozšířit“ doleva tak, že přidáme kladná čísla až k nule, nulu a záporných čísel tolik, kolik jsme přidali kladných. K původnímu součtu tak přidáme součet

$$-(g_1 - 1) + \dots + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + \dots + (g_1 - 1).$$

Vzniklý součet je stejný jako původní, tzn. n , protože jsme přidali nulu, a dále platí, že přidaná záporná čísla se dají vykrátit s odpovídajícími přidanými kladnými čísly. Počet sčítaných čísel je však nyní liché. Tímto rozšířením jsme získali situaci, která je stejná jako v případě a). Číslo n je nyní rozepsané tak, jak předepisuje formule (3) a její pravou stranu můžeme upravit do tvaru formule (2). Ta nám již říká, že číslo n má lichého dělitele většího než 1. $\square$

Je těžké říci, jak jsme vymysleli v části b) „trik“ rozšíření součtu. Můžeme pouze říci, že jsme byli motivováni tím, že jsme chtěli situaci b) převést na již vyřešenou situaci a). Takovéto triky se v matematice občas vyskytují. Je to ukázka tvůrčí stránky matematiky.

Nyní můžeme hypotézu 4 přejmenovat na větu. Bude to **věta 2**.

Větu 1 a k ní obrácenou větu 2 můžeme spojit do jedné věty.

Věta 3 *Kladné celé číslo n lze vyjádřit jako součet za sebou jdoucích kladných celých čísel, právě když má n alespoň jednoho lichého dělitele různého od čísla 1.*

Vraťme se k hypotéze 2a. Ta zatím dokázaná není. Teď by to však mělo být už „hračkou“. Protože mocniny čísla 2 mají pouze sudé dělitele s výjimkou čísla 1, není možné je podle věty 3 rozložit na součet po sobě jdoucích kladných celých čísel. Tato hypotéza je tak jednoduchým **důsledkem** věty 3. Přesto ji, pro její zajímavost, vyslovíme jako samostatnou větu. Použijeme k tomu však formulaci hypotézy 2.

Věta 4 *Mocniny čísla 2 nelze vyjádřit jako součet po sobě jdoucích kladných celých čísel.*

Vyslovme ještě inspiraci pro další zkoumání.

Některá celá čísla lze vyjádřit jako součet po sobě jdoucích kladných celých čísel různým způsobem, např.: $18 = 5 + 6 + 7 = 3 + 4 + 5 + 6$.

Problém 2 Zkoumejte, kolika způsoby lze dané kladné celé číslo n vyjádřit jako součet za sebou jdoucích kladných celých čísel.

Můžeme opět experimentovat. K získání odpovědi nám však stačí výše uvedená miniteorie. Teď již víme, že ke každému lichému děliteli čísla n (a právě jenom k němu) existuje rozklad čísla n na požadovaný součet. Formule (3) dokonce ukazuje, jak se tento rozklad vytvoří. Řešení vysloveného problému je proto obsaženo v následující větě:

Věta 5 *Nechť n je kladné celé číslo. Počet reprezentací čísla n jako součtů po sobě jdoucích kladných celých čísel je stejný, jako je počet lichých dělitelů čísla n různých od čísla 1.*

Demonstrujme větu 5 i s ukázkou vytvoření všech rozkladů pomocí následujícího příkladu.

Příklad: Číslo $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ má tři liché dělitele: 3, 5 a $3 \cdot 5 = 15$. Lze proto číslo 30 zapsat trojím způsobem jako součet po sobě jdoucích kladných celých čísel.

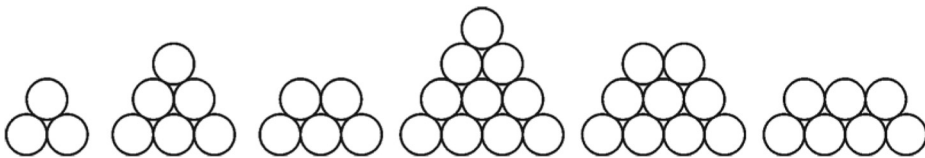
Součet tří po sobě jdoucích kladných čísel: $30 = 9 + 10 + 11$.

Součet pěti po sobě jdoucích kladných čísel: $30 = 4 + 5 + 6 + 7 + 8$.

Součet patnácti po sobě jdoucích čísel (nebo po vykrácení čtyř po sobě jdoucích kladných celých čísel):

$$30 = (-5) + (-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 6 + 7 + 8 + 9.$$

Tím naše zkoumání končí. Na závěr však ještě uvedeme dvě didaktické poznámky:



Obr. 5

Poznámka 1 Při zkoumání problému 1 můžeme využít geometrické cesty a vzít na pomoc obrázek (viz obr. 5).

Protože se zdá, že obrázky znázorňují složené dříví (kmeny stromů) nebo složené roury, nazývají se někdy získaná čísla „rourová“. Původní problém by pak mohl znít: Určete, která čísla jsou rourová. Jestliže se na obrázky podíváme více algebraicky, pak zjistíme, že pokud je na obrázku celý „trojúhelník“, odpovídá mu trojúhelníkové číslo. Pokud je na obrázku „seřiznutý trojúhelník“, pak číslo, které mu odpovídá, je rozdílem dvou trojúhelníkových čísel. Pro n -té trojúhelníkové číslo T_n platí:

$$T_n = n(n+1)/2$$

Libovolné rourové číslo proto můžeme vyjádřit ve tvaru $n(n+1)/2$, kde $n = 2, 3, 4, \dots$ nebo ve tvaru $n(n+1)/2 - m(m+1)/2$, kde n je alespoň o 2 větší než m a $m = 1, 2, 3, \dots$

Poznámka 2 K centrální formuli naší problematiky

$$n = (g-k) + \dots + (g-2) + (g-1) + g + (g+1) + (g+2) + \dots + (g+k)$$

můžeme dospět např. pomocí následujících příkladů (místo $4 \cdot 3$ budeme raději psát $3 \cdot 4$, obdobně pro $6 \cdot 5$):

$$3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 = (4-1) + 4 + (4+1)$$

nebo

$$5 \cdot 6 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = (6-2) + (6-1) + 6 + (6+1) + (6+2).$$

Podstatné při objevování naší formule je samozřejmě to, že stejných sčítanců je lichý počet, přičemž od prostředního čísla doprava postupně čísla zvětšujeme o 1, 2, 3 atd. a doleva čísla zmenšujeme o 1, 2, 3 atd. Je zřejmé, že tak dostáváme po sobě jdoucí celá čísla a jejich součet se nezmění.

LITERATURA

- [1] Kopka, J.: Isolated and Nonisolated Problems. In: *Teaching of Mathematics*, Oxford, Oxford University Press, 1992.
- [2] Kopka, J.: *Umění řešit matematické problémy*. Praha: HAV, 213.
- [3] Mason, J.: *Thinking Mathematically*. Bristol: Leaper & Gard Ltd., 1994.
- [4] Polya, G.: *How to Solve It*. Princeton: Princeton University Press, 1973.
- [5] Stevenson, F. W.: *Exploratory Problems in Mathematics*. Reston: The National Council of Teachers of Mathematics, INC, 1995.

POČÍTÁNÍ BEZ NULY

Magdalena Krátká

Tento článek vzniká pro potřeby studentů i učitelů, kteří se účastnili dílen na Letní škole matematiky a fyziky 2016 v Bedřichově¹. Dílny, tzn. i tento článek, byly inspirovány příspěvky Jaroslava Zhoufa, o nichž je možné se dočíst v jeho článcích z roku 2002 a 2003.

Všichni běžně a bezpečně počítáme v tak zvané desítkové poziční soustavě. To znamená, že používáme 10 číslic: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 a příslušnou hodnotu udává nejen samotná číslice, ale také její pozice, tedy např. číslice 3 v čísle 732 přispívá k hodnotě čísla třemi desítkami. Mnozí z nás se jistě setkali i s pozičními soustavami s jiným základem (nejčastěji informatici). Ovšem také s nepozičními soustavami, nejčastěji s římskými číslicemi. Pokud jste se někdy pokoušeli provádět nějaké (celkem jednoduché) výpočty s římskými číslicemi, pak jste jistě mohli ocenit genialitu pozičního zápisu. Ovšem naše poziční soustava skrývá ještě jeden poklad. Pojďme se o něm přesvědčit. . .

Že základem naší soustavy je číslo deset, je celkem pochopitelné. Nikdo asi nepřehlédl deset prstů na našich rukách (stejně tak bychom mohli mít základ 5 nebo 20). Ovšem od počátku nebylo tak jednoduché poradit si s případem, kdy nějaký řád (tj. například desítky nebo tisíce) v čísle chyběly. Například číslo 706 nemá žádné desítky. Před objevem nuly – mám na mysli nuly poziční, což zdaleka není totéž jako nula množstevní – bylo toto číslo zapsáno jen s mezerou na místě desítek, nějak takto: 7 6. Není se čemu divit, že toto mohlo způsobit celkem potíže, takovou mezeru můžete přehlédnout, také neodhadnete, chybí-li jen řád desítek nebo také stovek. A to nemluvím např. o čísle 60, kdy mezeru naznačíte jen velmi obtížně. Poziční nula byla tedy velkým vysvobozením z útrap poziční soustavy.

Pojďme si ale představit, jak bychom počítali, kdyby se historie vydala jinou cestou. Tedy nevzala do hry poziční nulu, ale pracovala s novou číslicí „deset“. Takovouto novou číslicí je třeba nějak označit, někteří účastníci dílen využili symbolu X s odkazem na římskou desítku². Zůstává nám tedy poziční soustava s číslicemi: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 a X (= 10), stále je o základu deset, avšak nikdy nikde nesmíme použít nulu.

¹Klíčové pro něj budou jednotlivé úkoly, které jsme během dílen řešili.

²Použili jsme také označení „D“ (jako deset), ovšem v psaném textu tento symbol mnohdy splýval s nulou, proto ho nelze doporučit.

Úkol 1 Pokračujte v řadě čísel v nové X-soustavě až do čísla 33:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ???

Řešení: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, X, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 1X, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 2X, 31, 32, 33, ...

V tomto úkolu je užitečné, když překročíte desítky několikrát, aby bylo zcela jasné, jak v naší nové X-soustavě čísla vypadají. Domníváte-li se, že je vám to jasné, pak můžete směle postoupit na další úkol.

Úkol 2 Přepište čísla z původní (poziční desítkové) do nové X-soustavy a ob-
ráceně:

$$\begin{array}{ll} (50) = & XX = \\ (51) = & X1X = \\ (510) = & 4X9X = \\ (9\ 100) = & \end{array}$$

Řešení:

$$\begin{array}{ll} (50) = 4X & XX = 110 \\ (51) = 51 & X1X = 1\ 020 \\ (510) = 4XX & 4X9X = 5\ 100 \\ (9\ 100) = (9\ 100) = (8XX0) = 8X9X \end{array}$$

Na první pohled je zřejmé, že pokud se v čísle nevyskytuje „0“, resp. „X“, pak se v obou soustavách zapisují stejně. Také nemůže dojít k nedorozumění, ve které soustavě se právě nacházíme, tudíž závorky nadále budeme psát jen u mezivýpočtů, kde obě soustavy „mícháme“.

Úkol 3 Vypočítejte následující úlohy v X-soustavě:

$$\begin{array}{ll} 12 + 15 = & 56 - 26 = \\ 12 + 18 = & 7X - 2X = \\ 3X + 5X = & X23 - 6X1 = \\ XX + 19X = & X\ 99X - 97X = \end{array}$$

Řešení:

$$\begin{array}{ll} 12 + 15 = 27 & 56 - 26 = 2X \\ 12 + 18 = 2X & 7X - 2X = 4X \\ 3X + 5X = 9X & X23 - 6X1 = 322 \\ XX + 19X = 2XX & X\ 99X - 97X = 9\ X1X \end{array}$$

Postup sčítání i odčítání je stejný jako v původní soustavě. Je dobré využít algoritmus písemného počítání. Ovšem musíme si dát pozor na přechody. Nyní například u úlohy $12 + 18$ počítáme $2 + 8$ je deset, píšu X (a k žádnému přechodu nedošlo), a dále $1 + 1$ jsou dva, píšu 2 a dostanu výsledek $2X$. Náročnější to může být u odčítání, když máme např. $X - X$ je nula, ale tu nesmím napsat, takže si „jednu desítku musím půjčit z vyššího řádu“.

Pokud už nám tedy sčítání a odčítání jakž takž jde, je čas se podívat na další operace.

Úkol 4 Zkuste ještě násobení a dělení:

$$15 \cdot 14 =$$

$$2X \cdot X3 =$$

$$XX \cdot X6 =$$

$$4XX : 17 =$$

$$94X : 19 =$$

Řešení:

$$\begin{array}{r} 15 \\ \cdot 14 \\ \hline 5X \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \hline 1XX \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2X \\ \cdot X3 \\ \hline 8X \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 29X \\ \hline 2X8X \end{array}$$

$$\begin{array}{r} XX \\ \cdot X6 \\ \hline 65X \end{array}$$

$$\begin{array}{r} X9X \\ \hline 1165X \end{array}$$

$$4XX : 1 = 2X$$

$$94X : 19 = 4X$$

Nyní, když jsme se poprali s nejjednodušší aritmetikou v naší X-soustavě, můžeme přejít k následujícímu úkolu.

Úkol 5 Vytvořte pro své kamarády co možná „nejzákeřnější“ úlohy na sčítání, odčítání a násobení v X-soustavě.³ Je zřejmé, že se můžete vyřadit právě s nejruznějšími přechody přes desítku.

Na dílnách jsme se dále zamýšleli nad možností zapsat desetinná čísla, nad hodnotou čísla „0, X“ a také nad nejednoznačností zápisu desetinných čísel v této X-soustavě. Dotkli jsme se i kritérií dělitelnosti, přičemž jsme konstatovali, že se vlastně nic podstatného nemění.

Co nám tato dílna vlastně měla přinést? Ano, především vděčnost za nulu, za geniální objev, který nám tolik ulehčil počítání a orientaci v číslech vůbec. Ale také jsme si mohli ověřit, nakolik rozumíme tak prostému a neustále používanému algoritmu písemného sčítání, odčítání, násobení a dělení. V tomto novém kontextu můžeme lépe porozumět, jak zautomatizovaný algoritmus vlastně pracuje a co mají práce děti na prvním stupni, kteří se s ním seznamují.

³Pozn. všechna čísla, která se ve vašich úlohách vyskytnou, smí mít nejvýše 6 číslic.

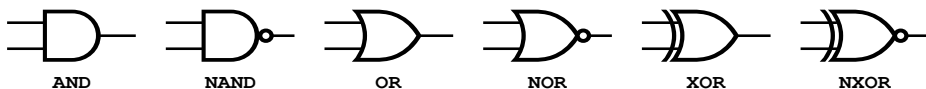
LITERATURA

- [1] Zhouf, J.: Aritmetika v soustavě s neobvyklými číslicemi. In Jirotková, D., Stehlíková, N. (eds.) *Dva dny s didaktikou matematiky 2003, sborník příspěvků*. Praha: PedF UK v Praze, 2003, s. 41–45.
- [2] Zhouf, J.: Zápis čísel s více číslicemi. In Calábek, P. a kol. (eds.) *Makoc 2002, sborník materiálů z podzimní školy péče o talenty*. Olomouc: UP Olomouc, 2003, s. 91–95.

ČÍSLICOVÁ LOGIKA

Martin Kruliš

Moderní procesory jsou velmi komplikované čipy obsahující miliony tranzistorů. Pro jejich snazší návrh se používají logické členy označované termínem *hradla* [1], což jsou o stupeň složitější elektronické celky obsahující typicky malé jednotky tranzistorů. Tato hradla reprezentují v elektrotechnice elementární stavební kameny, podobně jako třeba operátory výrokové logiky tvoří základ mnohem složitějšího matematického aparátu. Hradlo si tedy představme jako obvod, který má několik vstupů a právě jeden výstup. Pro naše účely se omezíme na hradla, která mají právě dva vstupy, takže odpovídají binárním operátorům.



Obr. 1: Přehled schématických značek logických členů

Na obrázku 1 jsou uvedeny elektrotechnické značky pro hradla reprezentující základní logické členy AND (konjunkce), OR (disjunkce), XOR (exkluzivní OR) a jejich negace. Pro úplnost si připomeňme tabulku hodnot jednotlivých operátorů (pro vstupy A , B).

A	B	AND ($\wedge$)	NAND	OR ($\vee$)	NOR	XOR	NXOR ($\Leftrightarrow$)
0	0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0	0	1

Obr. 2: Logické hodnoty výstupů pro jednotlivá hradla

V tomto textu se budeme často opírat o poznatky výrokové logiky [3]. Hodnoty 0 a 1 (tedy pravda a nepravda) reprezentujeme v elektronice pomocí napěťových stavů. Nula (nepravda) obvykle odpovídá nulovému napětí (zemi), zatímco jednička (pravda) odpovídá napájecímu napětí (např. u TTL obvodů [2] je to 5 V). Napětí samozřejmě není binární, ale spojitou veličinou, takže přesné určení logické hodnoty z napětí může být v okrajových situacích problematické. Zde si ale dovolíme oprostít se od fyzikálních detailů a na vodičích budeme rozlišovat pouze logické hodnoty napětí 0 a 1.

1 JEDNO HRADLO POSTAČÍ

Protože ani samotná výroba křemíkových čipů není technologicky snadná, používají se hradla jednoho druhu (případně několika málo druhů). Většinou se jedná o hradla **NAND** nebo **NOR**, která na svých vstupech provedou logickou operaci **AND** (konjunkce), resp. **OR** (disjunkce) a následně výsledek znegují.

Nyní je potřeba se zamyslet, zda opravdu dokážeme sestavit všechny možné logické funkce pouze např. z hradel **NAND**. Logické funkce, které je možné zapsat pomocí operátorů výrokové logiky, lze převést do takzvané *Disjunktivní normální formy* (DNF) [4]. V této podobě mají výroky tvar:

$$(A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \dots) \vee (\neg B_1 \wedge B_2 \wedge \dots) \vee \dots$$

Jednotlivé proměnné $(A_i, B_i, \dots)$ u sebe nemusí, ale mohou mít logickou negaci. V prvním kroku je tedy potřeba si rozmyslet, zda umíme vyrobit prostou negaci **NOT** z hradla **NAND**. Naštěstí pro nás platí jednoduchý vztah

$$\neg A = \neg(A \wedge A),$$

tedy negační člen **NOT** snadno vyrobíme z hradla **NAND** tím, že mu na oba vstupy přivedeme tutéž hodnotu. Dále z De Morganových zákonů [5] víme, že

$$A \vee B = \neg(\neg A \wedge \neg B),$$

což nám umožní sestavit z hradel **NAND** disjunkce v DNF. Zbývá drobný detail, a to jak se vypořádat s tím, že používáme pouze dvouvstupová hradla **NAND**. Toto technické cvičeníčko ponecháme čtenáři k rozmyšlení.

2 BINÁRNÍ SČÍTAČKA

Nyní už víme, že libovolnou logickou formuli umíme realizovat pomocí sítě hradel **NAND**. Pojdme se podívat, jestli dokážeme tyto mechanismy aplikovat na složitější problém, jako je např. sčítání přirozených čísel.

V elektronice a výpočetní technice se čísla typicky reprezentují ve své binární podobě. Číslo se tedy převede do dvojkového zápisu a reprezentuje patřičným počtem vodičů (bitů). Sčítání ve dvojkové soustavě se ničím neliší od sčítání v jakékoli jiné soustavě a můžeme pro něj použít stejný algoritmus, jaký jsme se všichni učili na základní škole – algoritmus sčítání pod sebou. Na obrázku 3 je jednoduchý příklad součtu čísel 3 a 9 zapsaných binárně (pro přehlednost jsme menší číslo doplnili zleva nulami, aby oba sčítance měli stejný počet bitů).

2.1 JEDNOCIFERNÉ SČÍTÁNÍ

Pokud pomíneme jedničkové přenosy mezi řády (na předchozím obrázku označené +1 a šipkou), pak samotný součet dvou jednobitových cifer odpovídá logické

$$\begin{array}{r}
 0011 \\
 1001 \\
 \hline
 1100 \\
 \quad \quad \quad \underbrace{\quad \quad}_{+1 \quad +1}
 \end{array}$$

 Obr. 3: Sčítání pod sebe ($3 + 9 = 12$)

funkci, která vrací 1, pokud je právě jeden ze vstupů roven 1, a 0, pokud jsou oba vstupy stejné (buď jsou oba 0, nebo oba 1). Tato funkce se nazývá *exkluzivní nebo* (XOR) a ve výrokové logice odpovídá negované ekvivalenci.

Jako první cvičení se tedy pokusíme vyrobit operaci XOR z co nejmenšího počtu hradel NAND. Opět nám zde pomůže výroková logika. Provedme následující úpravy (formule na jednotlivých řádcích jsou ekvivalentní):

$$\begin{aligned}
 &\neg(A \Leftrightarrow B) \\
 &\neg((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \\
 &\neg((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)) \\
 &\neg(\neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(B \wedge \neg A))
 \end{aligned}$$

Pokud bychom použili NAND hradlo i pro negace $\neg A$ a $\neg B$, pak bychom k realizaci potřebovali 5 hradel. Situaci můžeme drobně vylepšit malým trikem, když víme, že

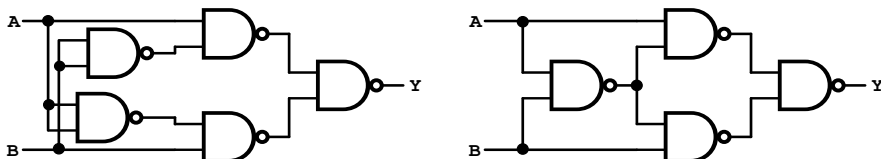
$$A \wedge \neg B \equiv A \wedge (\neg B \vee \neg A) \equiv A \wedge \neg(B \wedge A).$$

První úprava je ekvivalentní, protože pokud A je 0, výsledek celé konjunkce bude 0 bez ohledu na to, že jsme přidali $\vee \neg A$ k $\neg B$. Pokud A je 1, pak má $\neg A$ hodnotu 0, a tím pádem je $(\neg B \vee \neg A) \equiv \neg B$.

Na první pohled jsme si příliš nepomohli, ale pokud použijeme tuto záměnu za $\neg B$ i analogicky za $\neg A$ ve výše odvozené formuli, dostaneme

$$\neg(\neg(A \wedge \neg(B \wedge A)) \wedge \neg(B \wedge \neg(A \wedge B))).$$

Díky komutativitě konjunkce se podvýraz $\neg(A \wedge B)$ v našem výrazu vyskytuje hned dvakrát, takže jej můžeme spočítat jedním hradlem a výsledek použít na obou vstupech. Překreslením pomocí elektrotechnických značek dostaneme schéma na obrázku 4.



Obr. 4: Schéma zapojení XOR pomocí hradel NAND (původní a vylepšená verze)

2.2 PŘENOSY MEZI ŘÁDY

Přenos z nižšího do vyššího řádu¹ nám situaci trochu zkomplikuje. Označme si tedy A_i a B_i binární cifry obou sčítanců na pozici i a C_i přenos z i -tého do $(i+1)$ -ho řádu. Pro výpočet výsledné cifry Y_i na pozici i použijeme operaci XOR, jak jsme si ukázali v předchozí sekci, jen musíme navíc přičíst i přenos: $Y_i = (A_i \text{ XOR } B_i) \text{ XOR } C_{i-1}$ pro $i > 0$ a nejnižší cifru spočteme jako $Y_0 = A_0 \text{ XOR } B_0$. Pokud navíc označíme N počet bitů delšího ze vstupních čísel, pak nejvyšší cifra výstupu bude rovna poslednímu přenosu ($Y_N = C_{N-1}$).

Zbývá vyřešit, jak spočítat samotný přenos do vyššího řádu (tedy hodnoty C_i). Pokud nedochází k přenosu z nižšího řádu ($C_{i-1} = 0$) nebo právě počítáme cifru v nejnižším řádu, pak k přenosu do vyššího řádu dojde pouze v případě, kdy obě vstupní čísla jsou 1. V takovém případě je výsledná cifra nula ($Y_i = 0$) a jedničku přeneseme dál ($C_i = 1$). Jinými slovy, hodnota C_i odpovídá logickému AND obou vstupů ($A_i \wedge B_i$).

Pokud došlo k přenosu z nižšího řádu ($C_{i-1} = 1$), pak naopak jediný případ, kdy nedojde k přenosu do vyššího řádu, je, když jsou oba vstupy nulové. Ve všech ostatních případech bude výsledek větší než jedna a k přenosu dojde. Pokud to opět zapíšeme výrokovou logikou, $C_i = A_i \vee B_i$. Spojením obou případů dohromady dostaneme:

$$C_i = ((A_i \wedge B_i) \wedge \neg C_{i-1}) \vee ((A_i \vee B_i) \wedge C_{i-1})$$

Tuto formuli by bylo možné upravit pomocí De Morganových zákonů, aby-chom ji přizpůsobili našim podmínkám – tedy nasazení hradel NAND. Přímocaráře řešení je ale poněkud neúsporné, a tak si dovolíme dvě drobné úpravy, které neovlivní výsledek. V prvním kroku odstraníme $\neg C_{i-1}$ z první poloviny formule:

$$C_i = (A_i \wedge B_i) \vee ((A_i \vee B_i) \wedge C_{i-1})$$

Pokud je $C_{i-1} = 0$, pak se ve výrazu určitě nic nezměnilo. Pokud je $C_{i-1} = 1$, pak je upravený výraz vlastně $(A_i \wedge B_i) \vee (A_i \vee B_i)$ a to je ekvivalentní s $(A_i \vee B_i)$, takže nám odstranění $\neg C_{i-1}$ nezměnilo celkový výsledek.

Ve druhém kroku použijeme fakt, že disjunkci $A \vee B$ je možné nahradit výrazem $(A \text{ XOR } B) \vee (A \wedge B)$. Ověření platnosti ponecháme opět čtenáři jako malé technické cvičení, ale můžeme snadno nahlédnout, že pokud nahradíme disjunkci operací XOR, změnímme tím chování pouze v jediném případě – pokud jsou oba vstupy rovny 1. Abychom to napravili, přidáme do výrazu $(A \wedge B)$, nabývající hodnoty 1 právě ve zmíněném případě. Celkem tedy dostáváme:

$$C_i = (A_i \wedge B_i) \vee (((A_i \text{ XOR } B_i) \vee (A_i \wedge B_i)) \wedge C_{i-1})$$

¹Pro přenos se v angličtině používá slovo *carry*, a proto jej většinou budeme značit C .

Dále pokračujeme s pomocí De Morganových zákonů.

$$C_i = (A_i \wedge B_i) \vee ((A_i \wedge B_i) \wedge C_{i-1}) \vee ((A_i \text{ XOR } B_i) \wedge C_{i-1})$$

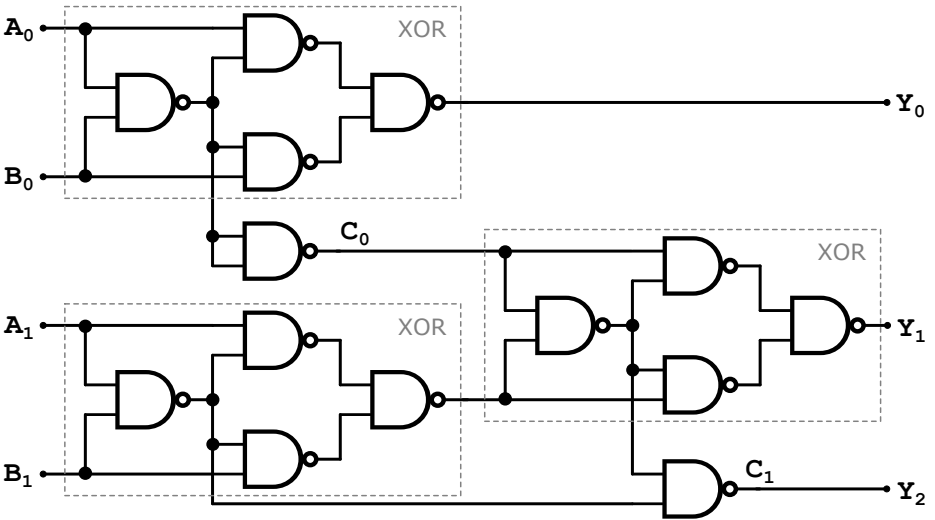
$$C_i = (A_i \wedge B_i) \vee ((A_i \text{ XOR } B_i) \wedge C_{i-1})$$

$$C_i = \neg(\neg(A_i \wedge B_i) \wedge \neg((A_i \text{ XOR } B_i) \wedge C_{i-1}))$$

Výsledný vzoreček je ve formátu, který umožňuje snadnou realizaci pomocí hradel NAND. Navíc operace $A_i \text{ XOR } B_i$ se provede už pro samotný výpočet hodnoty Y_i a některé další části (např. $\neg(A_i \wedge B_i)$) jsou ve skutečnosti také součástí výpočtu Y_i .

2.3 STAVÍME SČÍTAČKU

Výsledné schéma sčítačky pro 2-bitová čísla můžeme vidět na následujícím obrázku. V tomto schématu používáme celkem 14 hradel NAND a třikrát se nám opakuje motiv operace XOR z obrázku 4. Čtenář snadno nahlédne, jak tuto sčítačku rozšířit na libovolný počet bitů.



Obr. 5: 2-bitová sčítačka pomocí NAND hradel

Navržená sčítačka je lineární. To znamená, že doba výpočtu celého výsledku (počet hradel, kterými musí signál projít) závisí lineárně na počtu vstupních bitů. Pro delší čísla není tento postup příliš praktický, a proto se používá princip tzv. předpočítání jednotlivých přenosů. Tento předpočet je možné udělat hierarchicky a tím dosáhnout doby výpočtu, která je logaritmicky závislá na počtu bitů. Toto vylepšení ponecháme bystrým čtenářům na rozmyšlenou během dlouhých zimních večerů.

3 ZÁVĚR

Povedlo se nám s pomocí logiky navrhnout binární sčítačku. Zde ale zábava nemusí skončit – můžeme si ji opravdu postavit. Nejsnazší způsob je použít kontaktní nepájivé pole a integrované obvody – např. TTL obvod 7400², který v sobě obsahuje 4 dvouvstupová hradla NAND. Sestavu si můžeme ještě obohatit o grafický výstup v podobě 7-segmentového LED displeje. K tomu je navíc potřeba převodník z binární soustavy, který umí na displeji přímo zobrazovat výsledné číslo (např. CD4056). Alternativou je vyzkoušet naše zapojení v některém ze simulátorů hradel a elektrických obvodů, kterých je na webu celá řada.

Na závěr se můžeme podívat na krátké video, jak vypadá sestavená sčítačka naživo (<https://youtu.be/tyGtOKqx-0g>). Pro inspiraci ukažme ještě také binární násobičku (https://youtu.be/JhixTe96S_s).

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji Haně Krulišové za věcné připomínky k textu a za jazykové korektury.

LITERATURA

- [1] Logický člen. https://cs.wikipedia.org/wiki/Logický_člen
- [2] TTL. [https://cs.wikipedia.org/wiki/TTL_\(logika\)](https://cs.wikipedia.org/wiki/TTL_(logika))
- [3] Výroková logika. https://cs.wikipedia.org/wiki/Výroková_Logika
- [4] DNF. https://cs.wikipedia.org/wiki/Disjunktivní_normální_forma
- [5] De Morgan. https://cs.wikipedia.org/wiki/De_Morganovy_zákony

²Přesné značení se může lišit podle výrobce – např. MH7400 nebo SN74HCT00.

ROZVÍJENÍ PROSTOROVÉ PŘEDSTAVIVOSTI POMOCÍ M-CUBES

Petr Mentlík

Než se dostaneme k samotným M-cubes, měli bychom si zodpovědět alespoň v základních rysech tři otázky: co budeme rozvíjet, proč to budeme rozvíjet a jak to budeme rozvíjet.

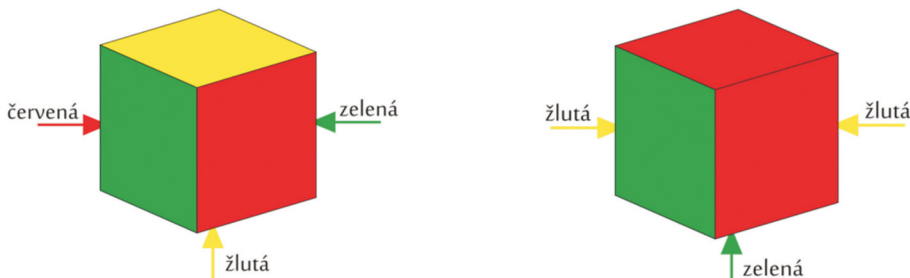
Na první otázku odpovíme zdánlivě jednoduše, prostorovou představivost. Ale co je vlastně prostorová představivost? Víme, že ji má někdo lepší a někdo horší, ale jednotná definice chybí. V různých publikacích nalezneme různá vymezení. Na základě prostudované literatury jsem se pokusil o následující shrnutí:

Prostorovou představivostí rozumíme široký soubor schopností, jejichž základním úkolem je co nejpřesnější vnímání vizuálního světa. Do tohoto širokého souboru zahrnujeme mimo jiné:

- schopnosti vnímat objekty v trojrozměrném prostoru včetně jejich vlastností,
- schopnosti zachytit vnímané objekty a jejich vlastnosti grafickými či jinými metodami,
- schopnosti vytvářet si představy, ať již reprodukční (rekonstruuující), které pracují s podněty dříve vnímanými, tak anticipační (konstruktivní), umožňující konstrukci věcí, s nimiž jsme se smyslově nikdy a nikde nesetkali,
- schopnosti manipulovat s těmito představami a modifikovat je,
- schopnosti vyjádřit geometrickým schématem či jiným způsobem tyto představy,
- schopnosti využít představ či grafických schémat k řešení praktických i teoretických problémů.

Jestliže máme základní představu o tom, co budeme rozvíjet, můžeme přejít k otázce druhé. Začneme vnitřní motivací. Prostorová představivost je jednou ze základních složek osobnosti, která je nezbytná pro úspěch v rozličných lidských činnostech a profesích, a již z tohoto důvodu si zaslouží být rozvíjena. Vnější motivací učitele jsou kurikulární dokumenty a v těch se dozvíme, že jedním z cílových zaměření vzdělávací oblasti matematika a její aplikace je „rozvíjení geometrického vidění a prostorové představivosti“. Tedy rozvoj prostorové představivosti je úředním úkolem matematiky.

Nyní můžeme přejít ke třetí otázce, a tím pádem k M-cubes. Co to je? Jedná se o krychlovou stavebnici skládající se ze dvou druhů tříbarevných krychlí. Z šesti stěn každé krychle jsou právě dvě červené, dvě zelené a dvě žluté. Stavebnici tvoří pouze dvě z možných zbarvení a to takzvané protivky (vlevo) a bokovky (vpravo).



Pro stavby krychlí pak platí dvě pravidla:

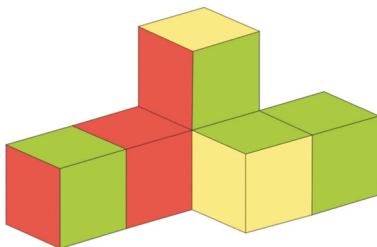
1. k sobě (na sebe) lze přikládat krychle jen tak, aby se kryly celé stěny,
2. k sobě (na sebe) lze přikládat jen stěny stejné barvy.

Nyní již můžeme přejít k úlohám. Vybral jsem 6 příkladů reprezentujících možnou šíři použití stavebnice. Jen pro úplnost doplním, že žáci v nich pracují se třemi rohovkami a třemi bokovkami.

Úloha 1 Na které variantě je znázorněna síť protivky? (Ž – žlutá, Z – zelená, Č – červená)



Úloha 2 Postavte stavbu na obrázku.



Úloha 3 Postavte stavbu podle pater.

I. patro				II. patro				III. patro			

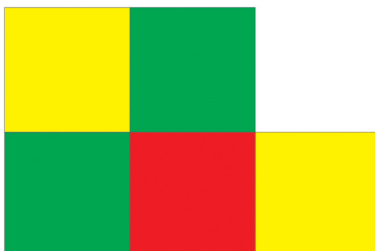
Úloha 4 Postavte stavbu odpovídající nárysu, půdorysu a bokorysu na obrázku (L – libovolná barva).

<u>nárys:</u>	<u>půdorys:</u>	<u>bokorys:</u> (zleva)

Úloha 5 Postavte stavbu z 6 kostek s následujícím půdorysem, aby byl součet bodů při pohledu shora.

<u>půdorys:</u>		
		5 bodů
		3 body
		1 bod

Úloha 6 Rozhodni, zda je možné, aby stopa na obrázku vznikla odvalováním protivky.



ELEKTRICKÁ MĚŘENÍ NEELEKTRICKÝCH VELIČIN

Jan Petrásek

Dnes jsem si pro Vás připravil trochu jinou přednášku z fyziky. Jak bývá mým zvykem, jde opět o přednášku z aplikované fyziky, odložme kalkulačky, tužky a nelámejme si hlavu s rovnicemi, tentokrát nebudeme nic odvozovat, ale budeme se koukat kolem nás, jak se věci mají v reálném světě. Na úvod bych rád citoval v překladu jednoho z největších fyziků současnosti, Richarda Philipse Feynmana, který pravil svým posluchačům: *„Rozvoj vědy a pokrok poznání se stávají stále obtížnější. Na experimentování již nestačí zápalky a sláma.“*

Nežli se společně dáme do práce, měl bych také prozradit něco málo o sobě. Nejsem fyzikem v pravém slova smyslu, měřicí technika a experimentální fyzika je jeden z mých koníčků. Působím jako lektor v počítačové škole Globis se specializací na technologie společností Microsoft corporation a Autodesk Inc. Na Jihočeské universitě studuji učitelství informatiky a fyziky pro střední školy a pod záštitou laboratoře Embedded systémů se zabírám IoT technologiemi společnosti Microsoft.

Pojďme se podívat, co nás dnes společně čeká, řekneme si, proč je pro nás výhodné převést neelektrické veličiny na elektrické a které elektrické veličiny nám poskytnou kýžený výsledek, na několika příkladech se podíváme pod pokličku snímačům, řekneme si něco o digitalizaci veličin a na závěr se podíváme na chyby, kterých se použitím digitálních měřících přístrojů dopustíme.

1 PROČ ELEKTŘINA?

Jak jsem již naznačil, naše dnešní povídání se bude ubírat směrem k digitálním měřením, takže začneme jednoduchou otázkou, s jakou veličinou pracuje hardware počítače? Odpovědi nikoho nepřekvapím, je to elektrické napětí. Proč jsem se na to ptal? Vše souvisí se vším, dnešní doba si žádá automatizaci měření, automatizaci řízení, zpracování ohromného množství naměřených hodnot a jejich uložení. Ve světě moderní fyziky už je sezení nad ručičkovým měřícím přístrojem s tužkou a sešitem utopickou představou. Nevěříte? Udělejme si myšlenkový experiment, přestavte si, že sedíte takhle s tou tužkou a sešitem u kontrolního místa LHC v Cernu, když vám ručička ukáže za jedinou sekundu řádově miliardy hodnot, stihnete si je všechny zapsat? Myslím, že teď už chápete, stejně jako já, nepostradatelnost počítačů, které to stihnou, ale máme tu problém, počítače neumí číst výchylky ukazatele, ty potřebují hodnoty ve svém jazyce,

kterým je binární soustava. Z toho důvodu je nutné rozvíjet digitální měřicí techniku a něco málo o ní vědět. Ani já, ani většina z nás tady nikdy nebude tím inženýrem, který má ta měřidla vymyslet a zkonstruovat, ale něco o tom, jak tyto přístroje fungují, je potřeba vědět. A pro digitální přístroje hovoří ještě jeden úplně přízemní důvod, je jím naše přirozená lenost, proč odečítat stupnici, přepočítávat hodnoty z rozsahů, když si můžeme jednoduše přechíst číslo, nebo rovnou prohlédnout graf výsledného průběhu pro celé měření?

1.1 ELEKTRICKÉ VELIČINY

Z elektrických veličin pro nás bude hlavní veličinou elektrické napětí U [V], na které se konec konců ve finále před digitalizací převádí všechny ostatní veličiny. Další elektrické veličiny, které se nám budou hodit, jsou elektrický proud I [A] a elektrický odpor R [Ω], který odečítáme jako úbytek napětí na odporovém členu, a pro strýčka příhodu frekvence f [Hz]. Důvodem, proč téměř vše nějakým způsobem převádíme na elektrické napětí je, že je to veličina, která je pro nás nejjednodušší pro převedení do digitální podoby.

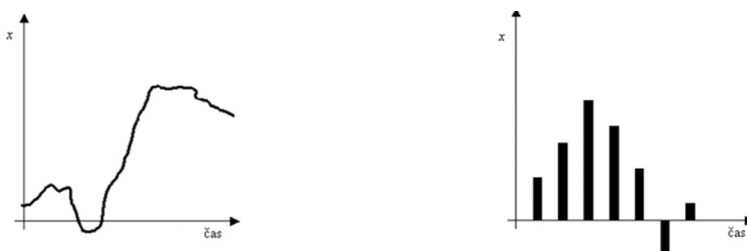
2 JEDEN DRUH MĚŘENÝCH VELIČIN

Neelektrických veličin, které potřebujeme měřit je jak ve fyzice, tak v chemii, celá řada, jako příklad, se kterým budeme dále pracovat, můžeme uvést sílu F [N], intenzitu osvětlení E [lx], teplotu T [K]¹, rychlost v [ms⁻¹] atd. Sami určitě přijdete na spoustu dalších. Když se nad tím množstvím a různorodostí veličin zamyslíme, tak myšlenka měřit vše pomocí jedné, či několika málo veličin, zní dost lákavě, tedy alespoň mě. Vystává tedy další otázka, jak tuto veličinu zvolit? V základu máme dvě kritéria na takovou veličinu, musí to být taková veličina, jejíž změnou budou různé věci reagovat na změny celého toho nepřeberného množství veličin, a také se bude dobře měřit. Díky tomu, že spousta materiálů mění svoje elektrické, nebo magnetické vlastnosti při působení jak mechanických, termodynamických či jiných elektromagnetických veličin, přivádí nás náš výběr právě mezi elektrické veličiny. Většina materiálů reaguje na působení vnější veličiny změnou elektrického odporu, jiné generováním napětí, respektive proudu. To je hezké, krásně se nám to zúžilo, ale máme tu problém, většinová reakce změnou elektrického odporu je jako taková špatně měřitelná, co s tím uděláme? Řešení nám podsovává ona zbylá menšina, změnu elektrického odporu budeme jednoduše měřit jako změnu úbytku napětí na odporu, což se nám hodí, protože s napětím se nám dobře dále pracuje.

¹Teplota uvedená v textu je Termodynamická, běžně v životě a dále v textu se pak setkáme s teplotou t [°C].

3 SNÍMAČE

Právě ke kýženému převodu neelektrické veličiny na napětí, proud, či frekvenci slouží snímače (senzory). Pojdme se na ně z obecné roviny podívat trochu blíže a na několika příkladech si popsat, jak pracují, jaká je vlastně jejich fyzikální podstata. Obecně můžeme snímače dělit dle několika základních kritérií. Tím prvním a asi hlavním, je energetická povaha, tedy zda jde o snímač *aktivní*, který se chová jako zdroj energie, nebo *pasivní*, který reaguje změnou svých parametrů. Když se na ně podíváme z jiného úhlu, najdeme další dvě velké skupiny (reflektující povahu veličin), *spojité* (spojitá veličina na výstupu) a *diskrétní* (vzorky signálu na výstupu, jde o detektory, nebo digitální snímače).



Obr. 1: Spojitý a diskretní signál. Zdroj: Úvod do teorie informace: Obr. 4-1-1 Spojitý a diskretní signál [online]. Brno: VUT, 2003 (cit. 16. 7. 2016). Dostupné z: <http://ottp.fme.vutbr.cz/skripta/vlab/daq/Ka040005.gif>

Posledním binárním dělením snímačů je dáno závislostí výstupu na změně snímané veličiny. Z tohoto pohledu máme snímače *lineární*, které mají přímo úměrnou změnu výstupní veličiny změně snímané veličiny, a *nelineární*, tedy takové, které výstupní veličinu mění dle jiné závislosti, například exponenciálně.

Když opět změníme úhel pohledu na snímače, tak se před námi vynoří rozdělení dle toho, co nám snímače udávají. Zde máme tři velké skupiny, *absolutní*, které prostě udávají hodnotu od nuly (počátku), *přírůstkové*, udávající změnu od posledního stavu, a *diferenční*, které udávají rozdíl proti referenční hodnotě veličiny.

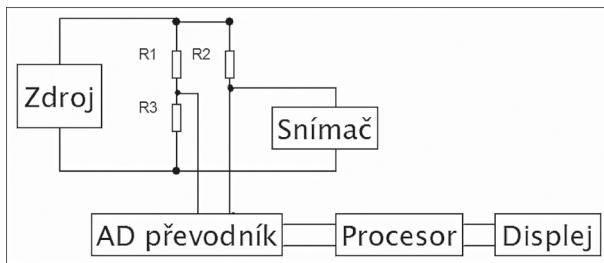
Aby toho nebylo málo, čeká nás ještě poslední a největší dělení snímačů, tedy dle principu jejich činnosti. To stroze vypíši v odrážkách, protože některým principům se budeme blíže věnovat dále.

- Mechanické – snímáním se mění mechanické vlastnosti snímače
- Odporové – mění se elektrický odpor snímače
- Kapacitní – mění se kapacita snímače (kondenzátoru)
- Indukčnostní – mění se indukčnost snímače (cívky)
- Indukční – mění se velikost indukovaného napětí
- Optické – mění se poloha světelného paprsku.

- Infračervené – snímá se změna frekvence nebo odraz infračerveného paprsku
- Ultrazvukové – mění se čas dopadu ultrazvukového signálu
- Radiové – mění se frekvence rádiového signálu
- Magnetické – mění se magnetické vlastnosti snímače a tím například indukčnost cívky nebo se změnou magnetických vlastností indukuje napětí
- Termoelektrické – mění se velikost vytvářeného napětí
- Piezoelektrické – mění se velikost vytvářeného napětí
- Pneumatické – mění se tlak plynu ve snímači

Stejně jako my všichni a věci, které jsou nám dobře známé, i senzory mají svoje vlastnosti. O člověku můžeme říct, že je vysoký, přívětivý, protivný, hubený, drzý atd., ale u snímačů by nám tyto vlastnosti nedávaly smysl a ani vlastnosti, které přiřazujeme věcem kolem nás, jako je barva, teplota, hmotnost, velikost apod. by nám příliš nepomohly. Snímače mají každý svoje specifické vlastnosti, které tvoří většinu vlastností, ale i tak můžeme najít některé společné rysy. Jsou jimi: *Třída přesnosti* – Udává, o kolik procent může být zobrazovaná hodnota odlišná (větší či menší) od hodnoty skutečné. *Rozlišovací schopnost* – Udává spolehlivě rozlišitelný přírůstek, jinak řečeno udává, o kolik se musí změnit měřená veličina, aby se rozpoznatelně změnila veličina výstupní. *Životnost* – Je definována jako doba (popř. počet měření), po kterou jsou parametry a vlastnosti snímače v uváděných tolerancích. *Šum* – Vzniká změnou vlastností, nebo parametrů snímače vlivem mechanických, chemických, tepelných i elektrických efektů (nečistoty, mastnoty, vlhkost, teplota, chvění, tlak, deformace, ...). *Linearita* – Udává největší odchylku skutečné charakteristiky od vztažné (ideální) přímky a uvádí se v procentech.

Vzpomínáte ještě na náš problém s elektrickým odporem a napětím? Určitě ano, jak jsme si již řekli, odpor měříme jako úbytek napětí, z čehož vyplývá následující schéma (založené na Wheatsonově můstku), které ukazuje, jakým způsobem lze zapojit většinu snímačů, abychom na displeji viděli digitální hodnotu snímané veličiny.



Obr. 2: „Blokové“ schéma zapojení snímače Zdroj: Vlastní

Přestaňme teoretizovat a pojďme se podívat na příklady několika konkrétních snímačů.

3.1 ODPOROVÉ SNÍMAČE TEPLOTY

Snímače teploty jsou naši první zastávkou v praktickém světě, už jen z toho důvodu, že digitální teploměry jsou všude kolem nás a upřímně, kdo z nás používá klasický lihový (či rtuťový) teploměr, když je nemocný? Snímače teploty nalezneme kromě teploměrů také v řídicích jednotkách klimatizací, počítačích, lednicích, mrazících boxech atd. Máme 3 velké skupiny snímačů teploty podle toho, jaký je jejich fyzikální princip.

Odporové snímače teploty využívají teplotní závislosti hodnoty elektrického odporu. Mám zde dvě velké skupiny, kovové a polovodičové, které se dále dělí na PTC a NTC. PTC (pozistory) reagují na nárůst teploty nárůstem elektrického odporu, naproti tomu NTC (negastory) snižují hodnotu elektrického odporu s rostoucí teplotou. Kovové snímače se řídí rovnicí:

$$R = R_0(1 + \alpha t), \quad (1)$$

kde R je výsledný odpor, R_0 je tabulková hodnota odporu materiálu pro teplotu 20°C a koeficient α je teplotní součinitel odporu, též je tabelovaný. Abychom získali nějaké srovnání, tak zavádíme poměr W_{100} , což je poměr hodnot pro teplotu 100°C a 0°C . Poměr W_{100} udává jakost odporového snímače. Abychom si maximálně ulehčili práci, tak se pro průmyslová i laboratorní měření zavedlo několik základních hodnot R_0 , které jsou 100, 200, 500 a 1000 Ω . Platí, že čím je vyšší hodnota základního odporu, tím je citlivější snímač. Malý přehled nejčastějších vlastností nejčastějších snímačů udává tabulka 1.

Tabulka 1: Přehled vlastností nejpoužívanějších odporových snímačů teploty
Zdroj: Interní materiály laboratoře automatizace SPŠSaE Resslova

Materiál	R_0 [Ω]	W_{100}	Měřitelný rozsah [$^\circ\text{C}$]
Pt	100	1,385 0	−200 až 850
Ni	100	1,618 0	−60 až 180
Cu	100	1,426 0	−200 až 200

Druhou již zmiňovanou skupinou odporových snímačů teploty jsou polovodičové snímače. Ty jsou založené na monokrystalickém křemíkovém těle, ve kterém je rozptýl nosičů náboje úměrný jejich pohyblivosti a ta je úměrná teplotě. Tyto součástky nesou výrobní označení KTY a KT. Mají velice rychlé reakce na změny teploty, tudíž se hodí do míst, kde je potřeba velmi přesně držet stabilní teplotu. Jejich nevýhodou je nižší životnost proti kovovým a nutnost linearizace výstupu. Jmenovitá hodnota odporu těchto křemíkových snímačů je 2 k Ω pro teplotu 25°C .

3.2 TERMOČLÁNKY

Druhou skupinou snímačů teploty jsou termočlánky, se kterými se snad každý několikrát setkal, nebo ještě setká, v průběhu školních let. Využívají termoelektrického jevu a jsou až zarážejícím způsobem jednoduché, v podstatě jde jen od dvojici zkroucených vodičů ze dvou různých materiálů. Zkroucený konec máme na místě, kde chceme měřit teplotu a volné konce máme umístěné ve stále teplotě, kde je mezi nimi termoelektrické napětí. Velikost termoelektrického napětí je dána:

$$U = (S_B - S_A)(T_2 - T_1), \tag{2}$$

kde S_A a S_B jsou Seebeckovy koeficienty kovů A a B, T_2 je teplota v místě měření a T_1 je stálá teplota studeného konce. Tabulka 2 uvádí přehled nejčastějších kombinací materiálů a jejich základní vlastnosti.

Tabulka 2: Přehled vlastností nejpoužívanějších odporových snímačů teploty
Zdroj: Interní materiály laboratoře automatizace SPŠSaE Resslova

Označení	Materiál	Termoelektrické napětí [mV/°C]	Teplotní rozsah [°C]	Termoelektrické napětí [mV/°C]
J	Fe–CuNi	5,37	–200 až 750	5,37
K	Ni–CrNi	4,80	–200 až 1 200	4,80
S	PtRh ₁₀ –Pt	0,64	0 až 1 600	0,64

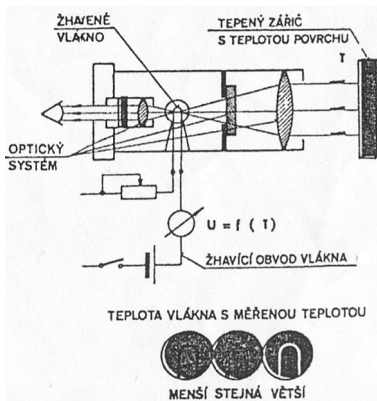


Obr. 3: Soustava pro měření teploty termočlánkem Zdroj: Günther GmbH: Kompenzační kabely [online]. Schwaig, 2013 (cit. 16. 7. 2016) Dostupné z: <https://www.guenther.eu/c27c2870-fc76-0a5f-c347-6e2c73422d81?Edition=cz>

3.3 PYROMETRY

Poslední a nejzajímavější skupinou snímačů teploty jsou Pyrometry. Radiační pyrometry můžeme mít klasické optické, nebo digitální. Jejich ohromnou výhodou je, že nijak neovlivňují měřenou soustavu, protože pracují s infračervenou částí spektra záření, které vydává měřená soustava. S tím souvisí i největší problém, který mají, musí se opravdu kvalitně zaostřit na soustavu, infračervené

záření v pozadí nebo silně ovlivňující cestu vnáší do měření chybu. I přes zmíněnou nevýhodu se jedná o nejpřesnější a nejrychleji reagující snímače teploty, dosahují chyby 0,75 % až 2 % z naměřené hodnoty, což je při úctyhodném rozsahu snímaných teplot od -50 do $3000\text{ }^{\circ}\text{C}$ velmi dobrá přesnost. Uvnitř pyrometru se nachází tenké wolframové vlákno, které je rozžhavováno pomocí proudového zdroje. Všechno v případě digitální varianty řídí mikročip a CCD čip, který snímá barvu zaostřeného pozadí a barvu vlákna, řídicí čip mění hodnotu proudu tak dlouho, dokud wolframové vlákno svou barvou nesplyne s pozadím. Pokud CCD již nedokáže vlákno rozlišit od pozadí, tak řídicí čip odečte nastavenou hodnotu proudu a dle naprogramované funkce provede výpočet teploty. Funkce, podle které výpočet probíhá je experimentálně sestavena tak, aby pro konkrétní hodnoty proudu přiřazovala hodny teploty vlákna a pokud je barva pozadí i vlákna stejná, je stejná i jejich teplota. Obrázek 4 ukazuje průřez optickým pyrometrem a také to, jak CCD vidí vlákno a pozadí.



Obr. 4: Průřez pyrometrem Zdroj: Interní materiály laboratoře automatizace SPŠSaE Resslova

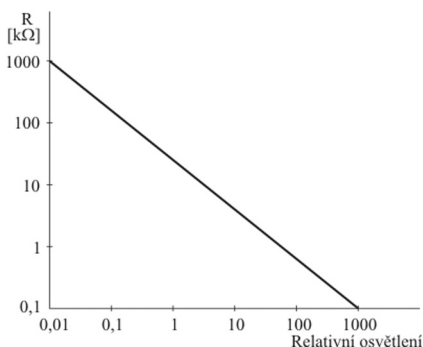
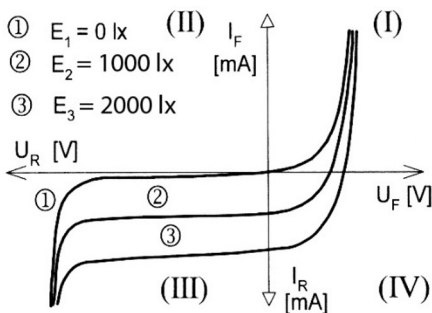
3.4 SNÍMAČE INTENZITY OSVITU

Další skupinou snímačů, které se podíváme pod pokličku, jsou snímače intenzity osvitu, které využívají fotoelektrický jev, za který obdržel Albert Einstein Nobelovu cenu. V principu máme dva typy snímačů, fotodiodu a fotorezistor, ale pojďme si říct nejdříve něco málo o fotoelektrickém jevu. Světlo (foton), které dopadá na přechod PN, narazí do elektronu ve valenční vrstvě atomu a předá mu svoji energii. Elektron energii fotonu absorbuje, čímž získá dostatek energie k opuštění valenčního pásu a přeskočí do pásu vodivostního – elektron opustí vlastní atom a pohybuje se prostorem krystalové mřížky, vznikl tím volný elektron, na jeho místě vznikla „díra“. Vzniklé volné elektrony jsou volné nosiče

náboje, které snižují elektrický odpor polovodiče, resp. zvyšují elektrickou vodivost polovodiče. Tento fotoelektrický jev nastává také i u fotorezistoru, který nemá přechod PN.

Fotodioda je plošná dioda konstrukčně upravená tak, aby do oblasti PN přechodu pronikalo světlo. Není-li přechod osvětlen, má voltampérová charakteristika stejný průběh, jako charakteristika běžné diody. Vliv osvětlení přechodu můžeme sledovat v závěrném směru diody, kdy dochází k lineárnímu růstu anodového proudu při rovnoměrném zvětšování osvětlení. Dioda se tedy chová jako pasivní součástka, jejíž proud v závěrném směru je závislý na osvětlení. Fotodioda reaguje na změny osvětlení velmi rychle, řádově 10^{-9} až 10^{-6} s. S pomocí filtrů můžeme vybrat jen určité vlnové délky, na které bude fotodioda reagovat. V-A charakteristika je ukázána na obrázku 5 pro několik hodnot intenzity osvitu.

Fotorezistor je pasivní elektronická součástka bez PN přechodu, jejíž elektrický odpor se snižuje se zvyšující se intenzitou dopadajícího světla. Jeho charakteristika je na obrázku 6.



Obr. 5: V-A charakteristika fotodiody

Zdroj: Wikipedie: Fotodioda [online]. Neznámé, 2016 (cit. 16. 7. 2016).

Dostupné z:

<https://cs.wikipedia.org/wiki/Fotodioda>

Obr. 6: Závislost hodnoty odporu fotorezistoru na intenzitě osvitu

Zdroj: Wikipedie: Fotorezistor [online]. Neznámé, 2016 (cit. 16. 7. 2016).

Dostupné z:

<https://cs.wikipedia.org/wiki/Fotorezistor>

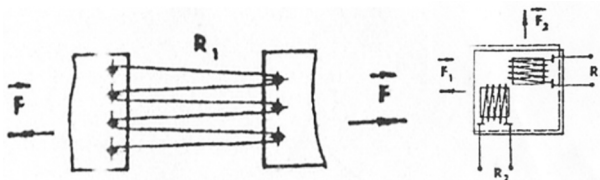
3.5 SNÍMAČE SÍLY

Jednou z prvních veličin, kterou jsme na hodinách fyziky poznali, je síla. Podívejme se nyní na to, jak pracují snímače síly. Na tomto místě by se slušelo připomenout, že síla je vektorovou veličinou, na což musíme myslet i při jejím snímání, abychom nesnímali jen nějaký její průmět. Snímače síly se jmenují Tenzometry a máme dva základní typy, s volným odporovým článkem a nalepený odporovým článkem, což napovídá, že reakcí na změnu síly bude změna elektrického odporu.

Tenzometry s volným odporovým článkem máme ve dvou provedeních, jednodušší z jednoho článku, které snímá jeden směr, a složitější ze 4 článků, které snímá dle typu uložení 4, nebo 8 směrů. Obě varianty vždy vrátí výslednici ze všech sledovaných směrů. Působením síly dochází k nedestruktivnímu prodloužení odporového drátu, což vede k zúžení jeho průřezu a v celkovém efektu ke změně hodnoty elektrického odporu. Čím je v klidovém stavu odporový drát v článku delší, tím je snímač citlivější. Pro realizaci je nutné znát klidový odpor drátu v článku a s využitím tohoto předpokladu můžeme použít pro určení výsledné hodnoty odporu vztah:

$$R = R_0 + kR_0 \frac{\Delta l}{l}, \quad (3)$$

kde R_0 je klidový odpor drátu, k je multiplikační koeficient daný výrobou, Δl je prodloužení a l je klidové délka drátu. Nejčastější využití je ve speleologii, kde se s jejich pomocí monitoruje stabilita skalních masivů. Obrázek 7 ukazuje jednoduchý Tenzometr s volným odporovým článkem (vlevo) a s nalepeným odporovým článkem (vpravo).



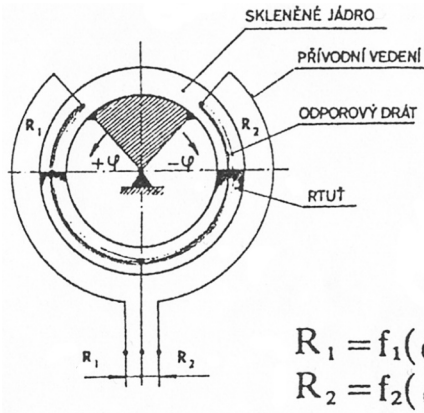
Obr. 7: Tenzometr Zdroj: Interní materiály laboratoře automatizace SPŠSaE Resslova

Tenzometry s nalepeným odporovým článkem pracují podobně jako s volným, liší se v tom, že články jsou nalepeny nevodivým lepidlem na papír, nebo jiný izolant. Zde platí, že počet článků je úměrný počtu směrů, ve kterých je síla snímána, což umožňuje snímat 1 až 8 směrů. Nejčastěji se používají v osobních a kuchyňských vahách a na zabezpečení výloh, či jiných velkých skleněných ploch.

3.6 SNÍMAČE GEOMETRICKÝCH A POHYBOVÝCH VELIČIN

Předposlední skupinou snímačů, o které si dnes něco povíme, jsou snímače geometrických veličin. Říkáte si, jak to souvisí s fyzikou? Hodně, v mechanice běžně měříme geometrické veličiny jako je délka a úhel, které potřebujeme pro další zpracování. My se podíváme na druhou zmiňovanou veličinu, představíme si zástupce snímačů úhlu natočení. Rtuťový snímač natočení je velice jednoduchý a přesný, ale vyžaduje pro svou práci svislou polohu. Tento snímač využívá jedné

ze základních vlastností elektrického proudu, a to té, že proud teče vždy cestou nejmenšího odporu. Uvnitř prstence prochází odporový drát s odporem v hodně řádu $k\Omega$, který je ze $2/3$ (ve vodorovném stavu) ponořen do rtuti, která je dobrým vodičem. Rtuti je v prstenci 50 % objemu tak, že vždy drží vodorovnou hladinu. Poměr ponořené a vynořené části drátu uvnitř prstence udává velikost odporu a tím i úhel natočení. Odpor je měřen z každého drátu samostatně proti zemi, protože R_2 je doplňkem R_1 do stavu, kdy je snímač ve vodorovné poloze.

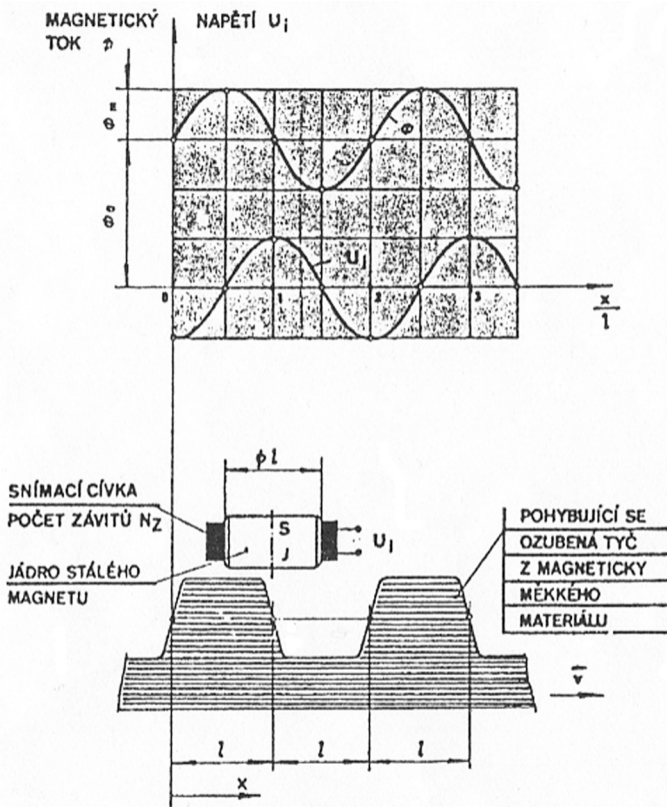


Obr. 8: Rtuťový snímač úhlu natočení Zdroj: Interní materiály laboratoře automatizace SPŠSaE Resslova

U mechanických veličin ještě zůstaneme, podíváme se na kinematiku, a řekneme si něco málo o jednom z mnoha snímačů přímočaré rychlosti. Konkrétně si rozebereme elektromagnetický snímač rychlosti. Nad zuby ozubeného kola je cívka s jádrem z permanentního magnetu. Ozubené kolu je mechanicky spřaženo 1 : 1 převodem s nápravou vozítka, jehož rychlost chceme měřit. Pokud se pod cívku nachází zub kola, sníží se intenzita magnetického pole $\Rightarrow$ sníží se indukované napětí. Indukované napětí je dáno vztahem:

$$U_i = -N_z \frac{\pi}{l} \Phi_m \left[\cos \left(\frac{\pi x}{l} \right) \right] v, \quad (4)$$

kde N_z je počet závitů cívky, Φ_m je magnetický tok, v je oběžná rychlost kola, l a x viz obrázek 9. Amplituda výstupního napětí je úměrná rychlosti.



Obr. 9: Elektromagnetický snímač rychlosti Zdroj: Interní materiály laboratoře automatizace SPŠSaE Resslova

4 ANALOGO-DIGITÁLNÍ PŘEVODNÍKY

Předposlední téma našeho povídání je již správně technické a s fyzikou jako takovou na první pohled příliš nesouvisí. Ano, jde o AD převodníky. Protože nejsme elektro inženýři, tak toto téma vezmeme jen letem světem, uvedeme si základní vlastnosti a k nim příklad jednoho typu převodníku. Úkolem AD převodníků je ze spojité veličiny (nejčastěji napětí) udělat diskretní (nejčastěji rovnou do binární podoby kódovanou) podobu výstupního napětí. Všechny převodníky mají dvě zásadní charakteristické vlastnosti: rozlišení [bit] a rychlost převodu [Hz]. Obecně můžeme převodníky rozdělit do tří velkých skupin: *paralelní* (rychlé, drahé, mají malé rozlišení), *serioparalelní* (zlatá střední cesta v rychlosti i rozlišení) a *integrační* (velké rozlišení, velmi pomalý převod, nízká cena).

4.1 VÝBĚR VHODNÉHO AD

Výběr správného AD převodníku je naprosto zásadní pro to, aby náš měřicí přístroj ukazoval správné hodnoty. V potaz musíme brát rozsah vstupních veličin a požadovanou přesnost (jejich podíl nám dá rozlišení), maximální možnou rychlost změny vstupní veličiny, protože platí vzorkovací teorém udávající požadovanou rychlost převodu (tzv. vzorkovací frekvenci):

$$f_{vz} \geq 2f_{\max}. \quad (5)$$

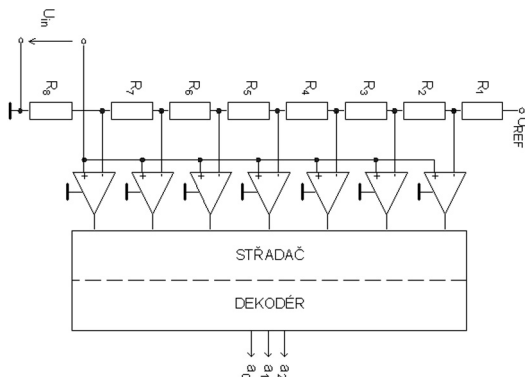
Na naše rozhodování má vliv také cena daného typu převodníku, náročnost na napájení a chlazení, protože obzvláště rychlé převodníky trápí teplotní závislost a přehřívání.

4.2 PARALELNÍ AD PŘEVODNÍK

Jako zástupce si představíme nejrychlejší typ převodníku, jde o paralelní tzv. flash převodník. Jeho rychlost převodu je řádově desítky GHz, ale rozlišení je jen 8 až 10 (u starších verzí i 4) bitů. Vyrábí se technologií ECL a skládá se z rezistorů, komparátorů, paralelního registru s plnou šíří slova a kodéru do pořadového kódu. Využívá se v osciloskopech a vysokofrekvenční elektrotechnice. Díky rezistorům se hodně zahřívá, ale zároveň potřebuje co nejstálější teplotu, aby nedocházelo ke zkreslení převodu vlivem teplotní závislosti rezistorů. Počet komparátorů, které jsou potřeba pro realizaci převodníku:

$$N = 2^{\text{počet bitů}} - 1 \quad (6)$$

Rezistory pro realizaci převodníku na obrázku 10 mají hodnoty R_1 a $R_8 = R/2$ a R_2 až R_7 mají hodnotu R .



Obr. 10: 8 bit AD flash Zdroj: Digitální obvody a mikroprocesory – multimediální učebnice [online]. Brno (cit. 16. 7. 7 2016).

Dostupné z: <http://www.umel.feec.vutbr.cz/bdom/dio/prikl/img/p4.png>

5 ZDROJE CHYB MĚŘENÍ DIGITÁLNÍMI PŘÍSTROJI

Posledním tématem, kterého se lehce dotkneme, je chyba měření, které se dopouštíme užitím digitálního přístroje. Podíváme se, co má na tuto chybu vliv a ukážeme si, jak u běžně prodávaných měřidel určit výslednou chybu, které jsme se dopustili, s pomocí manuálu. Nejprve si položíme onu palčivou otázku, jaké chyby se dopouštím volbou digitálního měřidla? Zkuste si před dalším čtením vzít tužku, papír a napsat si odpověď na tuto otázku, již (pokud jste četli pozorně) víte vše, co potřebujete, abyste si na ni dokázali odpovědět. Už máte odpověď? Pojdme ji porovnat s tím, na co jsem si vzpomněl při psaní této přednášky. Když to vezmeme popořádku, tak jako první faktor je citlivost snímače a jeho limity, další faktor je zkreslení veličiny její digitalizací (rozlišení AD převodníku), vliv má také rychlost převodu (postřehli jsme všechno, co se s veličinou děje?), chyba v přenosu informace mezi převodníkem a zpracovávajícím procesorem a jako poslední jsou rušivé vlivy okolí působící na snímač (vnější magnetické pole, teplotní výkyvy, záření pozadí atd.).

Pokud použijeme profesionální digitální měřidlo, tak v manuálu najdeme chybu snímače v procentech pro daný rozsah a velikost zkreslení daného digitalizací v digitech. Jak získat výslednou chybu hodnoty, kterou jsme naměřili? Odpověď je rovnice:

$$\delta = \pm \left(\Delta + \frac{d}{\text{nejvyšší zobrazitelné číslo}} \cdot 100 \cdot \frac{\text{rozsah}}{\text{hodnota}} \right) [\%], \quad (7)$$

ve které δ je chyba naší naměřené hodnoty v procentech, Δ je procentuální chyba snímače uvedená v manuálu pro daný rozsah a d je zkreslení digitalizací uvedené též manuálu pro daný rozsah v digitech. Pokud je přístroj cejchovaný, tak na kalibrační listině nalezneme po dobu platnosti kalibrace uvedenou hodnotu δ pro jednotlivé rozsahy.

Pro dnešek je to již vše, věřím, že se vám tato přednáška líbila a nejste unavení, naopak bych byl rád, když ve vás probudila zvědavého ducha a našli si další informace a v duchu následujícího citátu vše vyzkoušeli. „Řekni mi a získám povědomí, ukaž mi a já si zapamatuji, nechej mě vyzkoušet si a já pochopím.“

LITERATURA

- [1] ČSN 01 1301. *Veličiny, jednotky a značky ve fyzice*. Praha: Vydavatelství státního úřadu pro vynálezy a normalizaci, 1958.
- [2] *Interní materiály laboratoře automatizace a laboratoře mikroprocesorové techniky SPŠSaE Resslova Ústí nad Labem*.
- [3] Lacina, J.: *Automatizace 1*. [pdf] Chomutov: Střední průmyslová škola a Vyšší odborná škola Chomutov, příspěvková organizace, 2013 (cit. 16. 7. 2016).

- [4] Lacina, J.: *Automatizace 2.* [pdf] Chomutov: Střední průmyslová škola a Vyšší odborná škola Chomutov, příspěvková organizace, 2013
(cit. 16. 7. 2016).
- [5] Vylegala, P.: *ROBOTI: Snímače a senzory.* 2013. CZ.1.07/1.1.24/01.0066

FYZIKA JAKO NÁSTROJ KOMUNIKACE

Jan Petrásek

Dnes jsem si pro Vás připravil trochu jinou přednášku z fyziky. Jak bývá mým zvykem, jde opět o přednášku z aplikované fyziky. Na úvod bych rád citoval v překladu zakladatele kybernetiky a výtečného matematika Norberta Wienera, který pravil: *„Bez výjimky každá informace dochází k nám nějak zdeformovaná a zubožená.“*

Nežli se společně dáme do práce, měl bych také prozradit něco málo o sobě. Nejsem fyzikem v pravém slova smyslu, měřicí technika a experimentální fyzika je jeden z mých koníčků. Působím jako lektor v počítačové škole Globis se specializací na technologie společností Microsoft corporation a Autodesk Inc. Na Jihočeské universitě studuji učitelství informatiky a fyziky pro střední školy a pod záštitou laboratoře Embedded systémů se zabírám IoT technologiemi společnosti Microsoft.

Jak je z úvodního citátu patrné, dnešní povídání nebude o samotné fyzice, ale dotkneme se i světa informatiky, kde započneme, podíváme se na to, co jsou data, informace a jak se kódují, jak společně komunikujeme a následně se podíváme, jak ke komunikaci využíváme vlnění, tedy přesněji zvuk a světlo.

1 KOMUNIKACE, DATA A INFORMACE

Zamysleme se, jak spolu lidé mohou komunikovat? Možností je nepřeberné množství, například mluvenou řečí, dopisy, gesty a doteky, uměním, mediálními prostředky, emailem, chaty, telefony, ... Už jen při pohledu na tento krátký výčet je jasné, že často potřebujeme nějaké spojení, nějak něco přenést. To, co chceme předat druhým, to je informace a k tomu, abychom ji mohli předat, využíváme data. Informace a data, to nejsou fyzikální pojmy, proto pojďme na návštěvu do světa informatiky, aby nám pomohla spojit naší potřebu předat informace s fyzikou.

1.1 DATA

Co jsou data? Data jsou posloupnost symbolů, jimž je přiřazena určitá interpretace. Říkáte si, no to je jasné, nenapadá mě posloupnost symbolů, kterou bych napsal(a) bez toho, abych věděl(a), co znamená. Ukáži vám tedy příklad něčeho, co data nejsou. Pokud máme posloupnost symbolů „0x64“ o co se jedná? Jde o matematický výraz, tedy: $y = 0 \times 64$, či o znak „@“ v Ascii kódování, nebo

snad jde o adresu v paměti počítače, která je: 1000000?? Ani jedna z odpovědí není špatně, ale jako informatik bych uvažoval pouze poslední dvě možnosti, protože Ascii kódování se často zapisuje v podobě hexadecimálních číslic a adresy té, hexadecimální zápis bývá v informatice zvykem uvozovat právě posloupností „0x“.

1.2 INFORMACE

A co ona zmiňovaná informace? Informatici si definují jako: Nechť (U, P) je konečný pravděpodobnostní prostor. Jestliže A je nějaký jev v tomto prostoru, pak množství informace obsažené v tomto jevu je:

$$I(A) = \log_a \left(\frac{1}{P(A)} \right) = -\log_a(P(A)), \quad (1)$$

kde a je libovolný základ logaritmu, v informatice je vždy $a = 2$ a ve fyzice je nejčastěji $a = e$. Že vám to moc neříká, tak si pojďme nadefinovat dílčí variantu a na té si již ukážeme, co to vlastně je a jak se s tím setkáme v běžném životě. Nechť (U, P) je konečný pravděpodobnostní prostor. Jestliže A a B jsou jevy v tomto prostoru a $P(B) > 0$, pak podmíněná informace, která je podmíněná jevem B , je dána:

$$I(A | B) = -\log_a(P(A | B)) = -\log_a \left(\frac{P(A \cap B)}{P(B)} \right), \quad (2)$$

kde $P(A \cap B)$ je pravděpodobnost, že nastanou oba jevy zároveň a $P(B)$ je pravděpodobnost jevu B . Přejděme nyní ke slibovanému příkladu, protože obě definice jsou srozumitelné leda matematikovi, nebo teoretickému informatikovi. Máme chat, kde si Adam píše s Evou.

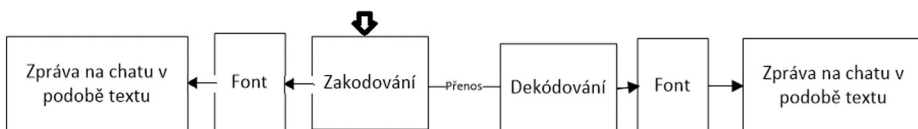
Jev B : Adam napsal slovo „tě“. Situace $A \cap B$: Adam napsal sousloví „miluji tě“. Víme, že $P(B)$ je 20 % a $P(A \cap B) = 3$ %, potom $I(A | B) = -\log_2 \left(\frac{0,03}{0,2} \right) = 2,737$ bit. Mějme druhý chat, kde si opět píší Adam a Eva. Jev B : Adam napsal slovo „ji“. Situace $A \cap B$: Adam napsal sousloví „miluji ji“. Víme, že $P(B)$ je 20 % a $P(A \cap B) = 15$ %, potom $I(A | B) = -\log_2 \left(\frac{0,15}{0,2} \right) = 0,415$ b.

Ještě v tom nejspíš nic nevidíte, tak si to pojďme rozebrat lidskou řečí. Z prvního chatu máme od Adama informaci o velikosti 2,737 bit, ale co se v ní schovává? Když se podíváme na přepis chatu, tak vidíme, že nejspíš Adam a Eva spolu chodí, nebo by si to alespoň Adam chtěl. Víme také, že se mu Eva líbí a je buď jeho přítelkyně, nebo kamarádka. V druhém chatu máme od Adama informaci pouze 0,415 bit, a co se v ní je? Víme, že Adam má nějakou přítelkyni, nebo se mu líbí nějaká slečna, o které nevíme vůbec nic, jen to, že to není Eva. Nevím ani, kdo je Eva, jestli je to jeho sestra, spolužačka, teta, babička, kamarádka, dcera, ... Z druhého chatu jsme nevyčetli nic o Evě, ani o Adamově přítelkyni, neobdrželi jsme prakticky žádnou informaci.

Zůstaňme ještě chvilku u našich chatů, písmena m , i , l , u , j , t , $ě$ představují naše symboly, slova „miluji“, „ji“, „tě“ jsou data (i každé samostatně nese informaci dle první definice), ale pro nás jsou zajímavé až soubory (datasets), což jsou uspořádané posloupnosti dat, nesoucí určitou informaci. V našem případě jsou soubory souslovími „miluji tě“ a „miluji ji“. Všimněme si, že méně pravděpodobné jevy nám poskytnou více informace, nežli jevy s vysokou pravděpodobností. A jak tohle všechno souvisí s fyzikou? Zatím to příliš nevypadá, ale už se nám to propojení komunikace a fyziky začíná rýsovat. Za pomoci informatiky se nám podařilo uchopit komunikaci, nyní ji stačí zakódovat a pověsit na nějaký fyzikální jev.

1.3 KÓDOVÁNÍ

Kódování umožňuje informaci bezpečně uložit a přenést. Kódování máme celou řadu a vybíráme si na základě povahy informace a toho, co s ní chceme učinit. Jako příklad takového procesu práce s informací může posloužit obrázek 1.



Obr. 1: Proces přenosu informace na chatu Zdroj: Vlastní

Jen krátce, co se na obrázku děje, pokud napíšete zprávu, tak data z klávesnice se zakódují a přenesou se k adresátovi, kde se dekodují a pomocí fontu se jim přiřadí grafická podoba. Na mém zařízení nedojde k zakódování dat, ale pomocí fontu se jim rovnou přiřadí grafická podoba. Jako příklady běžných kódování písmen a číslic je uvedena tabulka 1.

Tabulka 1: Příklady kódování znaků Zdroj: [4]

Znak	ACII	ACII	ISO 8859-2	UTF16
	[dec]	[bin]	[dec]	[hex]
P	80	1010000	80	Feff0050
@	64	1000000	64	Feff0040
0	48	0110000	48	Feff0030
a	97	1100001	97	Feff0061
ů	0249	11111001	249	Feff016f
š	0154	10011010	185	Feff009a

Informaci, kterou chceme předat, máme již zakódovanou, nyní ji stačí „pověsit“ na vhodný fyzikální jev a máme hotovo. Nebudu zde již dlouho napínat, protože dle duality částice a vlny lze všemu, co se pohybuje přiřadit vlnové vlastnosti, budeme i naši informaci šířit dále pomocí vlnění. Ono jak se za chvíli ukáže, děláme to dnes a denně ani o tom nepřemýšlíme. Nežli se pustíme do hrátek se zvukem a světlem, musíme si říci něco málo o vlnách obecně.

2 NĚCO MÁLO O VLNÁCH

Vlny máme 3 základních druhů: **Vlny mechanické** – tyto vlny jsou nejznámější, protože se s nimi téměř neustále setkáváme. Řídí se Newtonovými zákony a mohou existovat pouze v určitém látkovém prostředí (voda, vzduch, hornina). **Vlny elektromagnetické** – ty jsou již známé o něco méně, avšak používáme je prakticky neustále; běžné příklady jsou viditelné a ultrafialové světlo, rádiové a televizní vlny, ... Pro svou existenci nevyžadují látkové prostředí. Všechny elektromagnetické vlny se ve vakuu šíří stejnou (mezní) rychlostí $c = 299\,792\,458 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. **Vlny hmoty (de Broglieho vlny)** – i když se tyto vlny běžně vyskytují v moderních zařízeních, není tento druh vln příliš znám. Elektron, proton, další elementární částice a dokonce atomy a molekuly se projevují jako vlny.

Pro naše další povídání nám budou stačit vlny mechanické a elektromagnetické. Abychom si dále vyfiltrovali mechanické vlny a postupně se tak propracovali ke zvuku, musíme si uvést ještě další dělení. Mechanické vlny dělíme ještě na podélné a příčné. Podélné vlny jsou takové, ve kterých se částice média pohybují ve směru rovnoběžném se směrem rychlosti šíření, například zvuk šířící se ve vzduchu. Příčné vlny naproti tomu způsobují pohyb částice média kolmo na rychlost šíření. Nenechme se zmást, protože ač toto dělení vypadá zcela jednoduše a pochopitelně, tak vlna na moři je příčná i podélná současně. Abychom ta dělení dokončili, zbývá nám poslední způsob rozdělení vln, a to na stojaté a postupné. Stojaté vlnění vzniká v hudebních nástrojích a na napnuté struně, ale pro účely našeho dnešního povídání jej nepotřebuje nijak důrazně využívat, pro nás je mnohem zajímavější postupné vlnění, kterému se budeme věnovat celý zbytek přednášky.

Pojďme se podívat, co nám o postupném vlnění praví teorie okořeněná matematikou, ale nemusíte se ničeho obávat, bude nám stačit úvod do středoškolské matematiky. Abychom si vše zjednodušili, budeme předpokládat jednorozměrnou vlnu šířící se podél osy x a to až do doby, nežli bude řečeno jinak. Postupná vlna šířící se podél osy x lze popsat rovnicí:

$$y(x, t) = y_{\max} \sin(kx - \omega t + \varphi), \quad (3)$$

kde $kx - \omega t$ představuje fázi, φ je fázový posun vlny, pokud není změřeno nebo

zadáno jinak, je $\varphi = 0$, k je úhlový vlnčet ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$, kde λ je vlnová délka) a ω je úhlová frekvence, ostatní aktéry našeho vztahu již důvěrně známe, jsou jimi poloha (x) a čas (t). Vlnu, krom její rovnice a vlnové délky, charakterizuje též frekvence a rychlost šíření. Frekvence je dána vztahem:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}, \quad (4)$$

kde T je perioda kmitů. Pro fázovou rychlost (mimo ni máme ještě grupovou a transversální rychlost, ale těmi se blíže zabírat nebudeme) můžeme psát:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f. \quad (5)$$

A pro grupovou rychlost (rychlost pohybu obálky vlny) můžeme psát:

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}. \quad (6)$$

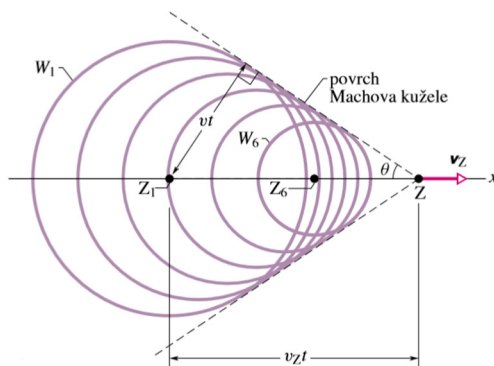
Vztahem pro grupovou rychlost jsme dokončili naši rychlou exkursi do teoretického světa obecného vlnění a již nastal čas podívat se na první „komunikační“ vlnění, kterým je zvuk.

3 ZVUK

Zvuk je podélné mechanické vlnění, které nám zprostředkovává asi nejpřirozenější způsob komunikace, tedy řeč. Zvuk (uvažujeme-li opět šíření podél jediné osy) lze popsat pomocí rovnice (3), kde položíme $\varphi = 0$. Zvuk se v prostoru se zvuk šíří pomocí změn tlaku, které zachytávají sluchová ústrojí živočichů (lidské ucho vnímá změnu tlaku v rozsahu od $2 \cdot 10^{-5}$ do 28 Pa). Protože zvuk je mechanickým vlněním, je jeho rychlost závislá na vlastnostech prostředí, ve kterém se šíří. Pro rychlost zvuku můžeme psát:

$$v = \sqrt{\frac{-\frac{\Delta p}{\Delta V/V}}{\rho}} \approx \sqrt{\frac{\text{elasticita prostředí}}{\text{setrvačnost prostředí}}}. \quad (7)$$

Pro suchý vzduch pokojové teploty je rychlost šíření zvuku cca 340 m/s. S rychlostí zvuku souvisí ještě jeden jev, tzv. Sonický třesk, ke kterému dojde, když těleso při svém pohybu překročí rychlost šíření zvuku v daném prostředí. Jak je to možné? Pokud se těleso pohybuje v protředí, tak jej rozráží a tím vzniká změna tlaku. Šíření zvuku v prostoru si můžeme představit, jako vlny na hladině, po dopadu kamene, ty tvoří soustředné kruhy (vlnoplochy), ale jak vypadají vlny po průjezdu lodi? Vysvětlením je Machův kužel, zobrazený na obrázku.



Obr. 2: Machův kužel Zdroj: [3]

Kružnice na obrázku 2 jsou jednotlivé vlnoplochy. Na povrchu kužele (vyznačen čerchovaně) dochází ke skládání (interferenci, tedy součtu) vln. Pokud je zdroj v klidu, jsou vlnoplochy soustředné, pokud se zdroj začne pohybovat, dochází ke zhušťování vlnoploch ve směru pohybu zdroje a pokud zdroj překročí rychlost šíření, vlnoplochy vznikají až za zdrojem vlivem „zacelení“ brázdy za tělesem.

Zvuk pokrývá mnohem větší část frekvenčního spektra, nežli jsme schopni vnímat sluchem, naše uši vnímají v rozsahu od 20 Hz do 20 kHz, což neznamená, že vyšší i nižší frekvence neexistují, nebo nás neovlivňují. Frekvencím nižším, nežli 20 Hz, říkáme infrazvuk a naopak frekvencím vyšším, nežli 20 kHz, říkáme ultrazvuk, který má velké uplatnění v medicíně, technice, ale i při získávání a přenosu informace.

3.1 DOPPLERŮV JEV

S frekvencí zvuku souvisí další zajímavý jev zvaný Dopplerův, který popisuje změnu vnímané frekvence v závislosti na pohybu zdroje zvuku i detektoru. Pokud se pohybuje detektor, tak $f = f_0 \frac{v \pm v_d}{v}$, kde v je rychlost zvuku, $+$ je pokud se detektor blíží ke zdroji, pokud se detektor vzdaluje od zdroje, tak je $-$, z čehož plyne, že pokud se zdroj zvuku přibližuje k detektoru, detektor zaznamená vyšší frekvenci zvuku. Obecně pro pohyb detektoru i zdroje po jedné přímce můžeme psát:

$$f = f_0 \frac{v \pm v_d}{v \mp v_z}. \quad (8)$$

Poslední, co si o zvuku řekneme, je jeho intenzita (lidově hlasitost) a její vnímaná úroveň. Intenzita zvuku roste s frekvencí a amplitudou vlny. Lidské ucho je neobyčejně citlivý detektor, který dokáže vnímat intenzitu v rozsahu 12 řádů, to

je od prahu slyšitelnosti (10^{-12} Wm^{-2}) až po prách bolesti ($3,162 \text{ Wm}^{-2}$). Intenzitu zvuku obvykle udáváme v dB, prahu bolesti odpovídá hodnota 125 dB a prahu slyšitelnosti 0 dB. Jako příklady pro představu mohu uvést: šum listí = 20 dB, tlumený hovor = 40 dB, startující letadlo (1 m) = 120 dB, petardy (bezprostřední blízkost) = 170 dB. Jak vypočítáme tyto hladiny? Odpověď je následující rovnice, která zakončí naše povídání i zvuku.

$$\beta = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) = 10 \log \left(\frac{\frac{P}{4\pi r^2}}{1 \cdot 10^{-12}} \right) \vee 10 \log \left(\frac{\frac{1}{2} \rho v \omega^2 y_m^2}{1 \cdot 10^{-12}} \right), \quad (9)$$

kde P představuje výkon zdroje, r představuje vzdálenost od zdroje $\vee$ je logická spojka nebo, která odděluje dvě varianty rovnice, a zbývající aktéry již důvěrně známe.

4 SVĚTLO

Většinu problematiky máme již za sebou a jdeme na poslední fyzikální prostředek k přenosu informace, o kterém bude dnes řeč. Světlo (spíše elektromagnetické vlnění obecně) je nejrychlejším možným způsobem přenosu informace, ve vakuu se bez ohledu na pohybový stav pozorovatele i vztažnou soustavu pohybuje mezní rychlostí c , která se přesně určí jako:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \cong 299\,792\,458 \text{ ms}^{-1} \quad (10)$$

Ve hmotném prostředí se světlo šíří o něco pomaleji, protože mu prostředí klade odpor, rychlost světla v konkrétním prostředí můžeme určit jako:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}, \quad (11)$$

kde n značí index lomu materiálu. Jen pro představu, například v křemíkovém skle ($n = 1,54$) je rychlost šíření světla zhruba $2/3c$. O elektromagnetickém vlnění lze obecně říci, že elektrická a magnetická složka jsou na sebe kolmé a obě jsou kolmé na směr šíření vlny. Elektromagnetická vlna přenáší energii i hybnost, proto působí tlakem na těleso, na nějž dopadá. Tento tlak můžeme určit jako:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{\frac{I \cdot S}{c}}{S} = \frac{\frac{\Delta U}{\Delta t \cdot S}}{c} = \frac{I}{c}. \quad (12)$$

Což naznačuje částicové vlastnosti světla a opravdu dle principu duality z kvantové mechaniky tomu tak je. Z částicového pohledu je světlo proudem fotonů, které přenáší energii, ale samy jsou nehmotné. Nemyslete si ale, že světlo působí na těleso, kam dopadá nějak velkým tlakem, tlak vyvolaný 5 mW červeným laserem je řádově 10^{-5} Pa .

Jestli jsou jen 2 věci, které byste si o světle měli pamatovat, tak je to jeho rychlost a Snellův zákon (zákon lomu), o kterém si něco povíme nyní. Tyto dvě znalosti jsou pro nás klíčové, abychom mohli pomocí světla předávat informace.

4.1 SNELLŮV ZÁKON

Se zákonem lomu se pojí celkem trojice vztahů, kterou si uvedeme a ke každému z nich si něco málo povíme.

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2). \quad (13)$$

Vztah (13) je vlastní zákon lomu, θ_1 je úhel dopadu, θ_2 je úhel lomu, n_1 je index lomu prostředí, ze kterého paprsek přichází a n_2 je index lomu prostředí, do kterého paprsek vstupuje. Pokud $n_1 < n_2$, tak se paprsek láme ke kolmici, v opačném případě dochází k lomu od kolmice. Lom paprsku je způsoben změnou rychlosti, kterou se světlo pohybuje v jednotlivých prostředích, následující vztah vyjadřuje, jak se k sobě mají rychlosti světla a indexy lomu

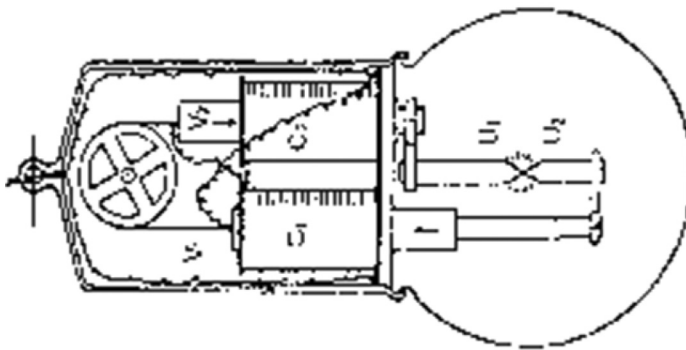
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (14)$$

Poslední vztah související se Snellovým zákonem je vztah pro určení kritického úhlu, pokud paprsek dopadá pod úhlem, který je větší, nežli kritický, dochází k jeho úplnému odrazu a neprostupuje do druhého prostředí

$$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right). \quad (15)$$

4.2 ZDROJE SVĚTLA

Základní informace o světle jsme si řekli, nyní nám už k realizaci předání informace překází jediná věc, nevíme nic o zdrojích světla. Vynechme na chvíli přírodní zdroje a pojďme se podívat na ty umělé. Nejstarším elektrickým zdrojem světla je oblouková lampa vynalezená Františkem Křižíkem roku 1878, která pracuje na principu zapáleného a udržovaného elektrického oblouku mezi dvojicí uhlíkových elektrod. O rok později (1879) přichází se svou žárovkou Thomas Alva Edison. Modernější žárovky pracují na principu rozžhavení wolframového drátku na vysokou teplotu a světlo se uvolňuje dle principu záření černého tělesa. Oba zdroje jsou fajn, ale jak asi všichni cítíme, pro přenos informace nejsou úplně ideální v 21. století, ale na druhou stranu s jejich pomocí lze posílat správy v Morseově abecedě. Při dalším pátrání po vhodném zdroji světla narazíme na LED, které pracují na principu kvantových jevů (nebude blíže popisovat). Ještě lepším zdrojem pro přenos informací jsou lasery (též pracují na kvantovém principu). Na obrázku si můžete, prohlédnou původní výrobní nákres Křižíkovy obloukové lampy.



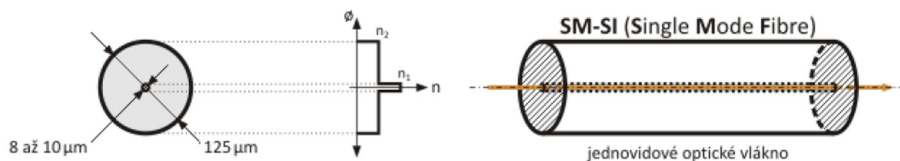
Obr. 3: Nákres obloukové lampy Zdroj: [5]

5 OPTICKÉ DATOVÉ SÍTĚ

Se zdroji světla jsme se pomalu, ale jistě dostali k poslední části dnešní přednášky, jde o vrchol v oblasti současné sdělovací techniky, nadšenci jistě tuší, že jde o optické datové sítě. Optické datové sítě tvoří páteř dnešního internetu, propojují kontinenty, státy, města, městské čtvrti, vědecká pracoviště, datová centra a již se objevují pokusy o domácí nasazení. Pomocí optických sítí se zajišťuje činnost zabezpečovacích zařízení na železnici, v letectví, i na silnicích. Přenosové médium tvoří optická vlákna, která se po 12, 48, nebo 92 sdružují do kabelů pro daný server, tyto kabely pro potřeby spoje na delší vzdálenost sestavují do mohutných kabelů, které obsahují statisíce až miliony vláken. Vláknem se realizují z LDG (low dispersion glass), tedy nejčastěji z křemíkového skla. Typickou rychlostí šíření signálu vláknem je $2/3c$ (není Vám tato hodnota povědomá?) a každé vlákno je obaleno materiálem s vysokou odrazivostí. Vláknem můžeme rozdělit do dvou velkých skupin dle dvojice kritérií. První dělení je na jedno vidová (vlákno nese jediný paprsek a jde o preferovanou technologii) a více vidová (vlákno se najednou šíří několik různých signálů). Druhé dělení je dle indexu lomu LDG, máme vlákna se skokovou změnou (uvnitř vlákna dochází k úplným odrazům paprsku) a vlákna s gradientní změnou (index lomu se mění spojitě, což vede k „ohybu“ paprsku). Pro přenos dat používáme 3 vlnových délek: 850, 1310 a 1550 nm.

5.1 OPTICKÁ VLÁKNA

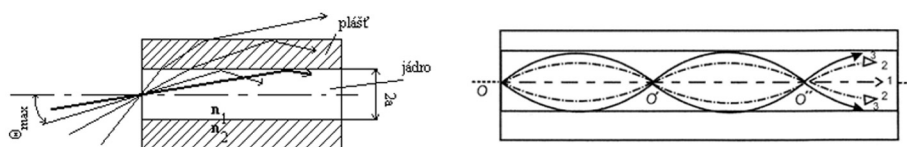
Jedno vidová vlákna se kombinují výhradně s lasery a přenáší informace na vlnách o vlnové délce 1310 a 1550 nm. Jsou vhodná pro přenos na velké vzdálenosti a pro komunikaci počítače je potřeba minimálně dvojice vláken (jedno pro vysílání a jedno pro příjem). Vlastní jádro má průřez 8 až 9 μm a disponuje



Obr. 4: Nákras jedno vidového optického vlákna Zdroj: Interní materiály UAI JCU

gradientní změnou indexu lomu. Jádru je obklopeno pláštěm o průřezu $125 \mu\text{m}$. Maximální přenosová rychlost, které se podařilo s tímto typem vláken dosáhnout na vzdálenosti 50 km, je 26 Tb/s, tedy během jedné sekundy se podařilo přenést 3,25 TB dat. Prohlédnout si nákras vlákna můžete na obrázku 4.

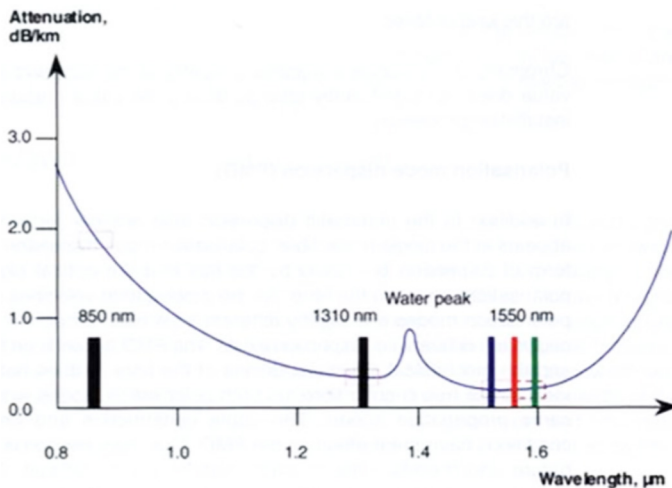
Více vidová optická vlákna používají jako zdroj záření infra LED pro vlnové délky 850 a 1 310 nm, nebo laser pro vlnovou délku 1 310 nm. Jak již bylo řečeno, tato vlákna přenášejí několik různých signálů (jedním směrem), proto mají více vstupních úhlů a větší průřez jádra, který činí 50 nebo $62,5 \mu\text{m}$, plášť je stejný jako v případě jedno vidových vláken. Uplatňují se zde obě technologie, jak skoková změna indexu lomu, tak gradientní změna indexu lomu. Díky přenosu více signálů jedním vláknem tato vlákna trápí jak chromatická, tak vidová disperze vedoucí k deformaci přenášeného signálu s čímž je spojeno nebezpečí poškození přenášené informace. Tato vlákna jsou vhodná pro přenos informace na krátké vzdálenosti (do 10 km).



Obr. 5: Více vidové vlákno se skokovou změnou indexu lomu (napravo) a s gradientní změnou indexu lomu (vlevo) Zdroj: Interní materiály UAI JCU

Podívejme se na optická vlákna trošku z ptací perspektivy a v bodech si uvedme nejdůležitější charakteristické vlastnosti optických vláken.

- Numerická apertura – sinus maximálního vstupního úhlu
- Vidová disperze – různé vidy se šíří vláknem po různých drahách stejnou rychlostí $\Rightarrow$ dorazí v různý čas $\Rightarrow$ deformace signálu
- Chromatická disperze – pro různé vlnové délky má daný materiál různý index lomu $\Rightarrow$ různá rychlost šíření $\Rightarrow$ deformace signálu



Obr. 6: Závislost útlumu optického vlákna délky 1 km na vlnové délce světla
Zdroj: interní materiály UAI JCU

- Ohyb – maximální možné ohnutí vodiče, které nevede k překročení mezního úhlu pro žádný z přenášených vidů (nedojde ke ztrátě dat)
- Mikroohyb – výrobní vada vlákna nebo špatná pokládka, důsledkem je zvýšení útlumu signálu
- Útlum vlákna – udává „odpor“ průchodu signálu kladený vláknem o délce 1 km, jinými slovy, kolik energie stojí signál, aby prošel vláknem o délce 1 km

5.2 SÍŤOVÉ KARTY

O přenosovém médiu již máme určité povědomí, ale co nám chybí ke štěstí jsou vysílače a přijímače, neboli síťové karty. Jako vysílače se používají již zmiňované infra LED, které mají nekoherentní záření, širokou spektrální charakteristiku a malé optické výkony. Druhou variantou jsou LD (laser diode), jejichž záření je vysoce koherentní, mají úzkou spektrální charakteristiku a velké optické výkony. Jako přijímače se využívají fototranzistory (v osobních stanicích), PIN fotodiody a lavinové fotodiody. Vzhledem k nutnosti znalosti fyziky pevných látek a kvantové mechaniky se nebudeme pouštět do dalšího popisu jejich činnosti, jen si řekneme, že dopadající světlo je jimi velmi rychle a efektivně převedeno na kvalitní elektrický signál.

5.3 BEZDRÁTOVÉ OPTICKÉSÍTĚ

Třešnickou na dortu, na jejímž výzkumu se již od počátku podílí i Ústecká univerzita a spolu s VŠB, VUT, ČVUT a UK se řadí mezi několik málo akademických pracovišť provozujících aktivně tuto technologii, jsou bezdrátové optické sítě. Pro přenos dat se používají optické pulsně modulované signály, které mají frekvenci mezi 100 a 1 000 THz. Používá se světlo o krátké vlnové délce: 800 nm a dlouhé vlnové délce: 1 550 nm. Každý spoj je tvořen ze dvou stejných jednotek, které musí mít mezi sebou přímou viditelnost. Každá jednotka se skládá z vysílače a přijímače a elektronické části, která se stará o převod signálu do počítači srozumitelného kódu. Principem vysílače je vyslat světlo o největším možném výkonu tak, aby dopadalo na plochu přijímače. Jako světelný zdroj lze použít výkonnou LED nebo laserovou diodu. Výhoda laseru je ve vyšším výkonu a minimální divergenci. Nevýhodou je, že laserová dioda je velmi drahá, vyžaduje složité elektronické obvody a musíme ji chladit. Naopak LED dioda je velmi levná a jednoduchá. O jednoduchosti LED diod svědčí i to, že se používají do amatérských, doma sestavených spojů na bázi RONJA. Lasery se naopak používají do velmi drahých profesionálních spojů. Přijímač má za úkol pochytit co nejvíce světla vysílaného vysílačem a usměrnit ho na detektor, kterým je ve většině případů rychlá lavinová fotodioda. Přijímač se konstruuje tak, aby měl co největší plochu a usměrňoval světlo na fotodiodu. Aktivní plocha fotodetektorů bývá 1 mm² nebo méně. Z výše uvedených faktů vyplývá, že jsou kladeny vysoké nároky na upevnění spojů. Seběmenší zachvění vysílače by mohlo způsobit metrové odchylky paprsku. Proto používané držáky bývají zpravidla velmi robustní a naddimenzované. Zároveň ale musí při instalaci umožňovat přesné zaměřování v jednotkách milirad. Na další omezení narážíme při instalaci na výškové budovy. Ty, jak je známo, se kývají v rámci decimetrů, proto některé optické systémy mívají systémy aktivního zaměřování, které automaticky upravují směr paprsku.



Obr. 7: Jednotka bezdrátové optické sítě RONJA Zdroj: [1]

Náš společný čas, který jsme na tuto přednášku měli, se již nachyluje ke svému konci a nežli se rozutečeme, rád bych se rozloučil dalším citátem, tentokrát od Alberta Einsteina: „*Fantazie je důležitější než informace.*“ Děkuji vám všem za pozornost a budu se těšit někdy příště u dalšího z témat aplikované fyziky.

LITERATURA

- [1] *Bezdrátové Sítě: Optické bezdrátové sítě.* [online]. 2010 (cit. 17. 7. 2016). Dostupné z: http://bezdratovesite.wz.cz/#_Toc170470607
- [2] ČSN 01 1301. *Veličiny, jednotky a značky ve fyzice.* 1. vyd. Praha: Vydavatelství státního úřadu pro vynálezy a normalizaci, 1958.
- [3] Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.: *Fyzika: vysokoškolská učebnice obecné fyziky.* Brno: VUTIUM, 2000. Překlady vysokoškolských učebnic. ISBN 80-214-1869-9.
- [4] Skrbek, M.: *Teorie informace.* České Budějovice: 2013.
- [5] *Slavní fyzikové: František Křižík.* [online]. 2005 (cit. 17. 7. 2016). Dostupné z: <http://vedci.wz.cz/Images/Kriz1.gif>

SILNÝ ZÁKON MALÝCH ČÍSEL

Luboš Pick

ÚVOD

Název je parafrází na poměrně dost známý silný zákon velkých čísel, který patří k základním stavebním kamenům matematické statistiky a praví, že výběrový průměr náhodných veličin by měl skoro jistě konvergovat ke střední hodnotě. V případě klasické homogenní kostky o šesti stěnách to znamená, že je střední hodnota každého hodu je rovna

$$\frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = 3,5.$$

Takže budeme-li házet dost dlouho, pak se průměr všech hodů bude blížit hodnotě 3,5. Nebo budeme-li házet dost dlouho, určité nám alespoň jednou padne 3,5.

Nás ovšem bude zajímat silný zákon malých čísel, což je úplně něco jiného a navíc má oproti silnému zákonu velkých čísel jisté podstatné nevýhody. Jednak se projevuje se jen občas, a hlavně dost často neplatí. Takže jako matematický koncept nevypadá příliš důvěryhodně, přesto však stojí za studium.

POPIS PRINCIPU

Jak je všeobecně známo, navykli jsme si považovat matematiku za exaktní vědu. Na tvůrčím procesu objevování nových matematických zákonů ale nic exaktního není. Dva nejdůležitější prvky matematického výzkumu jsou umění položit si správnou otázku a schopnost rozpoznat schéma. Jenže pro pokládání správných otázek neexistuje algoritmus a to, co se nám zprvu jeví jako schéma, se nakonec může ukázat jen (ne)šťastnou shodou okolností.

AUTOR ZÁKONA

Autorem zákona je kanadský matematik Richard Kenneth Guy (obr. 1) z University of Calgary.

Jak sám píše ve svých článcích, dlouhá léta se snažil vypracovat optimální formulaci zákona. Nakonec jich publikoval několik, uvedme tu poslední: *There aren't enough small numbers to meet the many demands made of them.* Tedy něco jako: *Na to, kolik se toho po nich chce, je malých čísel příliš málo.* Je jich tak málo, že zákonitě vznikají podivné náhody, které nás pak zavádějí na scestí, neboť jsme náchylní je mylně považovat za schémata.



Obr. 1

VÝKLAD ZÁKONA

Zákon, jenž je zároveň dravou Skyllou, která hravě zhatí veškeré plány na zobecnování smělých hypotéz, i nenasytnou Charybdou, v jejímž bezedném chřtánu nenávratně mizí každý pokus o důkaz nějakého tvrzení, způsobuje matematikovi bolestné dilema, zda se má vydat směrem k ověření domněnky, nebo raději za protipříkladem. Objevíme-li cosi, co při troše fantazie vypadá jako náznak nadějného schématu, máme v podstatě dvě možnosti: buď je naše schéma opravdu schématem, tedy jakýmsi novým a zajímavým matematickým zákonem, nebo jde o pouhou shodu okolností vyvolanou působením silného zákona malých čísel. Zásadní otázka pochopitelně zní, jak poznáme, která z těchto možností nastala? Na tuto otázku bohužel neexistuje žádná universální odpověď.

ROZCVIČKA

Není těžké nalézt jednoduché příklady ilustrující výše uvedenou úvahu. Zkusme si kupříkladu nejprve rozmyslet, které z následujících výroků o přirozených číslech jsou pravdivé:

- každé druhé číslo v první stovce je sudé,
- 10 procent z prvního sta čísel tvoří kvadráty,
- čtvrtina z prvního sta čísel jsou prvočísla,
- všechna čísla menší než 10 až na jedno jsou nějakou mocninou prvočísla,
- polovina z prvních deseti čísel jsou Fibonacciova.

Ano, správně, pravdivé jsou všechny. A teď se zamysleme nad tím, které z nich představují *schémata*. V tomto případě schématem rozumíme nějaký matematický princip, který má obecnější platnost než jen v rámci první stovky

nebo první desítky čísel. Zkusme tedy rozšířit uvedená smělá tvrzení na druhou stovku nebo desítku čísel a pozorujme, zda některé z nich tuto operaci přežije:

- každé druhé číslo v prvních dvou stovkách je sudé,
- 10 procent z prvních dvou set čísel tvoří kvadráty,
- čtvrtina z prvních dvou set čísel jsou prvočísla,
- všechna čísla menší než 20 až na jedno jsou nějakou mocninou prvočísla,
- polovina z prvních dvaceti čísel jsou Fibonacciova.

Jak vidno, přežije pouze první výrok, následující čtyři ani náhodou. Posouzení uvedených výroků je samozřejmě trestuhodně triviální a u těch posledních čtyř by asi zcestná myšlenka na jejich zobecnování napadla málokoho. Existují ale složitější případy, u kterých není věc zdaleka tak jasná.

ZRÁDNÉ POSLOUPNOSTI

Zásadní studnici příkladů, na nichž silný zákon malých čísel řadí vskutku nehorázně, tvoří oblast posloupností přirozených (nebo obecněji reálných) čísel. O slavné posloupnosti $1, 2, 4, 8, 16, 31, \dots$ (počet oblastí, na které rozdělí kruh spojnice n bodů ležící na jeho obvodové kružnici) toho bylo napsáno již hodně. Pohledíme však kupříkladu na posloupnost

$$1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, \dots,$$

po jejímž ohledání by asi málokdo čekal pokračování

$$1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 60, 61, \dots$$

Přitom jde o přípustné řady jednoduchých grup, tedy vcelku dost důležitý koncept elementární algebry. Je tedy vidět, že záleží na tom, kolik toho ze schématu odhalíme, chceme-li po někom, aby uhodl pokračování (jak to s oblibou činí například dělají psychologové ve svých poradnách). U některých částečně odhalených posloupností se názor na jejich následující vývoj může měnit s každým novým zveřejněným členem. *Partition function*, známá a důležitá funkce v teorii čísel udávající, kolika způsoby lze zapsat přirozené číslo a nulu ve tvaru součtu přirozených čísel, je toho notorickým příkladem:

$$1, 1, 2, 3, \dots$$

A hele, Fibonacciova čísla!

$$1, 1, 2, 3, 5, \dots$$

No jasně, vždyť jsem to říkal.

$$1, 1, 2, 3, 5, 7, \dots$$

Aha, tak ne, tak prvočísla.

$$1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, \dots$$

Výborně, krásně mi to sedí.

$$1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, \dots$$

Sakra pes. Že by lichá čísla?

$$1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, \dots$$

Co je to za blázinec?

ZAUZLENÍ

Nyní uvedeme několik testovacích příkladů. Úkolem čtenáře bude vždy rozhodnout, zda naznačená zákonitost je zárodkem ryzího matematického schématu, nebo zda jde o projev silného zákona malých čísel. Zkuste si tipnout. Odpovědi naleznete v následujícím oddílu.

Příklad 1 Čísla

$$\begin{aligned} 2^{2^0} + 1 &= 1, \\ 2^{2^1} + 1 &= 3, \\ 2^{2^2} + 1 &= 17, \\ 2^{2^3} + 1 &= 257, \\ 2^{2^4} + 1 &= 65\,537 \end{aligned}$$

jsou prvočísla. Jde o ryzí schéma, nebo o projev SZMČ?

Příklad 2 Číslo $2^n - 1$ může být prvočíslem jedině tehdy, je-li n prvočíslo. Čísla

$$\begin{aligned} 2^2 - 1 &= 3, \\ 2^3 - 1 &= 7, \\ 2^5 - 1 &= 31, \\ 2^7 - 1 &= 127 \end{aligned}$$

vsutku prvočísly jsou. Platí to pro všechna taková čísla, nebo jde o projev SZMČ?

Příklad 3 Čísla

31,
 331,
 3 331,
 33 331,
 333 331,
 3 333 331,

jsou prvočísla. Jde o schéma?

Příklad 4 Všechna čísla

$3! - 2! + 1! = 5,$
 $4! - 3! + 2! - 1! = 19,$
 $5! - 4! + 3! - 2! + 1! = 101,$
 $6! - 5! + 4! - 3! + 2! - 1! = 619,$
 $7! - 6! + 5! - 4! + 3! - 2! + 1! = 4421,$
 $8! - 7! + 6! - 5! + 4! - 3! + 2! - 1! = 35899,$

jsou prvočísla. Jde o schéma?

Příklad 5 Pro žádné $n \in \mathbb{N}$ není

$$78557 \times 2^n + 1$$

prvočíslem. Vskutku?

Příklad 6 Pro žádné $n \in \mathbb{N}$ není

$$7013 \times 2^n + 1$$

prvočíslem. (Pro prvních pár čísel to lze hravě ověřit.) Platí toto tvrzení, či nikoli?

Příklad 7 Jak je všeobecně známo, Eukleides dokázal, že existuje nekonečně mnoho prvočísel. Postupoval přitom sporem: kdyby bylo prvočísel konečně mnoho, pak by jejich součin zvýšený o jedničku nemohl být dělitelný žádným z nich, a tedy by musel být dělitelný nějakým novým prvočíslem. Vskutku, máme

$$\begin{aligned} 2 + 1 &= 3 \\ (2 \times 3) + 1 &= 7 \\ (2 \times 3 \times 5) + 1 &= 31 \\ (2 \times 3 \times 5 \times 7) + 1 &= 211 \\ (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11) + 1 &= 2311. \end{aligned}$$

Výsledkem samotného součinu ale samozřejmě nemusí být vždy prvočíslo. Také tomu tak není, neboť máme například

$$\begin{aligned}(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13) + 1 &= 30\,031 = 59 \times 509 \\(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17) + 1 &= 510\,511 = 51 \times 97 \times 277 \\(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19) + 1 &= 9\,699\,691 = 51 \times 347 \times 27\,953.\end{aligned}$$

Jenomže když onen součin odečteme od následujícího prvočísla, pak, jak se zdá, výsledkem prvočíslo bude. Pohledíme:

$$\begin{aligned}5 - 2 &= 3 \\11 - (2 \times 3) &= 5 \\32 - (2 \times 3 \times 5) &= 7 \\223 - (2 \times 3 \times 5 \times 7) &= 13 \\2\,333 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11) &= 23 \\30\,047 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13) &= 17 \\510\,529 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17) &= 19 \\9\,699\,713 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19) &= 23.\end{aligned}$$

Je tomu tak, nebo jde jen o další projev zlotřilého SZMČ?

Příklad 8 Vezměme si posloupnost všech prvočísel. Utvořme první difference, pak absolutní hodnoty druhých diferencí, třetích, čtvrtých, a vše uspořádejme do tabulky na obrázku.

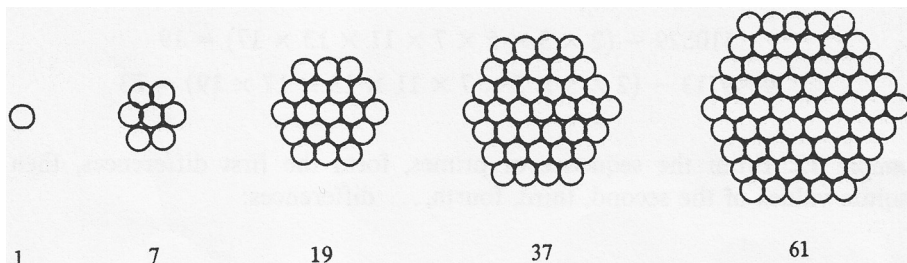
2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67
1	2	2	4	2	4	2	4	6	2	6	4	2	4	6	6	2	6	
1	0	2	2	2	2	2	2	4	4	2	2	2	2	2	0	4	4	2
1	2	0	0	0	0	0	0	2	0	2	0	0	0	2	4	0	2	
1	2	0	0	0	0	0	2	2	2	2	0	0	2	2	4	2	2	
1	2	0	0	0	2	0	0	0	2	0	2	0	2	0	2	2	0	
1	2	0	0	2	2	0	0	2	2	2	2	2	2	2	0	2	2	0
1	2	0	2	0	2	0	2	0	2	0	0	0	0	0	2	2	2	
1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	2	2	0	0	0	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	0	2	0	2	0	2	0	0
1	0	0	0	0	0	0	2	2	0	2	2	2	2	2	2	2	0	

Obr. 2

Potom každý řádek v tabulce bude začínat jedničkou. Nebo ne?

Příklad 9 Je známo, že 2^n není nikdy kongruentní jedničce $(\text{mod } n)$, pokud $n > 1$. Naproti tomu 2^n je kongruentní dvojce $(\text{mod } n)$, pokud je n prvočíslem, a občas i pokud není $(341, 561, \dots)$. Bude pro nějaké $n > 1$ číslo 2^n kongruentní trojce $(\text{mod } n)$?

Příklad 10 Včelí čísla jsou definována podle obrázku 3.



Obr. 3

Samotná posloupnost včelích čísel nám asi nic neříká. Zato částečné součty včelích čísel jsou zajímavější:

$$1, 8, 27, 64, 125.$$

Budou všechny částečné součty včelích čísel třetími mocninami celých čísel?

Příklad 11 Posuďme následující posloupnost:

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1 + x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2}{n+1}.$$

Pak prvních pár čísel vychází

$$1, 2, 3, 5, 10, 28, 154, 3\,520, 1\,551\,880, 267\,593\,772\,160, \dots$$

Bude x_n vždy celé číslo?

Příklad 12 Ke každému exponentu n najdeme přirozené číslo $m > 1$, které se rovná cifernému součtu čísla m^n . Tedy, alespoň to tak vypadá, pohleďte:

$$\begin{aligned} 2^1 &= 2, & 9^2 &= 81, & 8^3 &= 512, & 7^4 &= 2\,401, \\ 28^5 &= 17\,210\,368, & 18^6 &= 34\,012\,224, & 18^7 &= 61\,222\,032, \end{aligned}$$

a můžete si samostatně pro radost ověřit, že posloupnost utěšeně pokračuje dále například takto:

$$\begin{aligned} 46^8, & 54^9, 82^{10}, 98^{11}, 108^{12}, 20^{13}, 91^{14}, 107^{15}, \\ 133^{16}, & 80^{17}, 172^{18}, 80^{19}, 90^{20}, 90^{21}, \dots \end{aligned}$$

Půjde to zařít pro každý exponent?

Příklad 13 Nivenovým číslem nazýváme přirozené číslo, které je dělitelné svým ciferným součtem, tedy například 21 nebo 133. Je $n!$ Nivenovým číslem pro každé n ? Pro ilustraci si to prověříme pro prvních pár čísel:

- $4! = 24$ je dělitelné 6,
- $5! = 120$ je dělitelné 3,
- $6! = 720$ je dělitelné 9,
- $7! = 5\,040$ je dělitelné 9,
- $8! = 40\,320$ je dělitelné 9,

atd. Pro radost si můžete tvrzení prověřit pro prvních řekněme 400 čísel. Nemusíte, provedli jsme za vás, vše vychází. Platí to obecně?

Příklad 14 Posuďme následující posloupnost reálných čísel z intervalu $(0, 1)$:

$$\begin{aligned} &0,71; 0,009; 0,42; 0,85; \\ &0,27; 0,54; 0,925; 0,17; \\ &0,62; 0,355; 0,78; 0,03; 0,48; \dots \end{aligned}$$

Nemusíte nám věřit (raději to přepočítejte), ale tato posloupnost má následující vlastnost:

- první její dva členy leží v různých polovinách intervalu $(0, 1)$,
- první její tři členy leží v různých třetinách intervalu $(0, 1)$,
- první její čtyři členy leží v různých čtvrtinách intervalu $(0, 1)$,
- a tak dále.

A my se ptáme: dá se sestojit nekonečná taková posloupnost?

Příklad 15 Každé liché číslo můžeme zapsat ve tvaru prvočíslo plus dvakrát kvadrát. Nebo ne? Podívejme se na několik příkladů.

$$\begin{aligned} 3 &= 3 + 2 \times 0^2, \quad 5 = 3 + 2 \times 1^2, \quad 7 = 5 + 2 \times 1^2, \quad 9 = 7 + 2 \times 1^2, \\ 11 &= 3 + 2 \times 2^2, \quad 13 = 11 + 2 \times 1^2, \quad 15 = 7 + 2 \times 2^2, \quad 17 = 17 + 2 \times 0^2, \\ 19 &= 11 + 2 \times 1^2, \quad 21 = 3 + 2 \times 3^2, \quad 23 = 5 + 2 \times 3^2, \quad 25 = 23 + 2 \times 1^2, \dots \end{aligned}$$

Některá čísla mají takových representací dokonce víc. Přeborníkem první stovky je číslo 61:

- $61 = 59 + 2 \times 1^2$
- $61 = 53 + 2 \times 2^2$
- $61 = 43 + 2 \times 3^2$
- $61 = 29 + 2 \times 4^2$
- $61 = 11 + 2 \times 5^2$

Je proklamovaný výrok pravdivý, nebo není?

ROZUZLENÍ

Příklad 1 – řešení Bohužel, jde o projev SZMČ. Kdo ses spletl, nezoufej, jsiť v dobré společnosti. V tomto případě byl totiž silným zákonem malých čísel ošálen i sám Pierre de Fermat. Leonhard Euler později odhalil, že $2^{32} + 1 = 641 \times 6\,700\,417$. Všechna další známá čísla uvedeného typu jsou složená. Zatím (snad) poslední je $2^{2^{20}} + 1$ (Jeff Young & Duncan Bell, 1985).

Příklad 2 – řešení Opět jde o projev SZMČ. V tomto případě byl silným zákonem malých čísel postižen páter Marin Mersenne. Uvedenou vlastnost má sice slušný počet čísel, platí ale například

$$2^{11} - 1 = 23 \times 89.$$

Není známo, jestli prvočísel tohoto tvaru je konečně nebo nekonečně mnoho. Dnes je jich známo 48. Zatím (snad) poslední $2^{57\,885\,161} - 1$ bylo nalezeno v roce 2013. Je to zároveň i největší známé prvočíslo. Má 17 425 170 cifer.

Příklad 3 – řešení Ne. Ještě další člen posloupnosti, tedy 33 333 331, je prvočíslem, ale už následující nikoli, neboť

$$333\,333\,331 = 17 \times 19\,607\,843.$$

Příklad 4 – řešení Nejde. Hned příští člen posloupnosti totiž splňuje

$$9! - 8! + 7! - 6! + 5! - 4! + 3! - 2! + 1! = 326\,981 = 79 \times 4\,139.$$

Příklad 5 – řešení Ano! John Lewis Selfridge dokázal v roce 1963, že

$$78\,557 \times 2^n + 1$$

musí být dělitelné jedním z čísel 3, 5, 7, 13, 19, 37, 73.

Příklad 6 – řešení Wilfrid Keller dokázal v roce 1985, že výraz

$$7\,013 \times 2^n + 1$$

je složeným číslem pro všechna n splňující $0 \leq n \leq 24\,160$. Duncan Buell a Jeff Young totéž ověřili pro dalších 325 čísel menších než 10^5 . Všichni věří, že jednou musí vyjít prvočíslo. Zatím to však nikdo nedokázal. Odpověď na tuto otázku není známa.

Příklad 7 – řešení Domněnku vyslovil Richard F. Fortune v roce 1941. Další pár čísel v této posloupnosti ji potvrzuje:

$$37, 61, 67, 61, 71, 47, 107, 59, 61, 109, 89, 103, 79.$$

Odpověď není známa, ale je velice pravděpodobné, že tvrzení platí. Rozdíl totiž nemůže být dělitelný žádným z prvních k prvočísel, a tedy nejmenší možný kandidát na dělitele je p_{k+1}^2 , což je číslo velké asi jako $(k \log k)^2$. Pro případný protipříklad by bylo nutné nalézt prvočíselnou mezeru poblíž N o velikosti asi $(\log N \log \log N)^2$. Číselní teoretikové mají za to, že takové mezery neexistují, ale naše současná matematická výbava nám to neumožňuje prokázat.

Příklad 8 – řešení Tuto domněnku vyslovil N. L. Gilbreath v roce 1958 a je dnes známa pod jeho jménem. Hned v roce 1959 byla ověřena pro $k < 63\,419$ a v roce 2009 dokonce pro $k < 10^{10}$ (Adam Odlyzka). Odpověď není známa. Hallard Croft vyslovil myšlenku, že problém vůbec nesouvisí s prvočísly, nýbrž že domněnka platí pro jakoukoli posloupnost obsahující dvojku a lichá čísla, která neroste moc rychle a nemá moc velké lakuny.

Tady by se možná hodil jeden doslovný citát pana autora: *2 is the oddest prime*. Hezký bonmot, ale v češtině nefunguje.

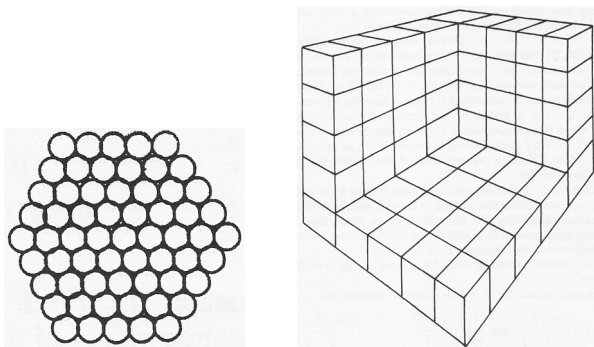
Příklad 9 – řešení Ale ovšem. Například

$$2^n \equiv 3 \pmod{n} \quad \text{pro} \quad n = 4\,700\,063\,497.$$

Příklad 10 – řešení Ano, budou! Není to vůbec těžké. Pro n -té včelí číslo v_n si totiž snadno indukci odvodíme vzorec

$$v_n = 1 + 6 + 12 + \dots + 6n = 3n^2 + 3n + 1.$$

Takže přidáme-li n^3 , dostaneme $(n+1)^3$. Existuje navíc ještě jedno nádherné estetické řešení, založené na hranaté verzi n -plástve:



Obr. 4

Příklad 11 – řešení Nebude, ale chvíli to ještě vydrží. Přesněji řečeno, všechna čísla $x_1, \dots, x_{42}$ jsou celá. Jde o takzvanou posloupnost Fritze Göbela. Pro počítání je lepší rekursivní formule

$$(n+1)x_{n+1} = x_n(x_n + n)$$

Pracujeme-li modulo 43, dostaneme tyto hodnoty x_n :

n	=	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
x_n	≡	1	2	3	5	10	28	25	37	10	20	15	38	19	42	36	34	2	35	39	31	13	2
n	=	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	
x_n	≡	6	26	28	29	4	14	42	5	20	17	4	20	16	29	42	13	42	20	8	23	33	

Obr. 5

Z výše uvedeného odvodíme vzorec

$$x_{42}(x_{42} + 42) = -10(-10 + 42) = -320.$$

Toto číslo ale není dělitelné 43. Odtud vyplývá, že x_{43} není celé.

Příklad 12 – řešení Nepůjde. Norman Megill dokázal, že domněnka platí pro všechna $n \leq 104$, ale zkazí se pro $n = 105$.

Příklad 13 – řešení Neplatí. Tento problém formuloval Sam Yates. Později Carl Pomerance vyslovil domněnku, že pravidlo obecně neplatí a že protipříklad se najde kolem čísla $n = 500$. Měl pravdu. Na základě Pomeranceova návodu Yates později vskutku prokázal, že $432!$ není Nivenovým číslem, neboť jeho ciferný součet je roven $3^2 \times 433$, přičemž 433 je prvočíslo.

Příklad 14 – řešení Nedá. Ještě chvíli je možné pokračovat, například takto:

$$0,97; 0,22; 0,66; 0,32,$$

tím to ale bohužel končí. Berlekamp a Graham v roce 1970 dokázali, že žádná taková posloupnost nemůže mít více než 17 členů.

Příklad 15 – řešení Není, ale těsně. Problém formulovali britští matematikové Godhard G. Hardy a John E. Littlewood. Testem tentokrát projde opravdu hodně čísel. První výjimkou je až číslo 5 777, které se uvedeným způsobem zapsat nedá. Dokázal to Ron Ruemmler a rovnou vyslovil domněnku, že je to výjimka jediná. To se sice dosud neprokázalo, ale jiná výjimka se zatím nenašla. Pravidlo tedy neplatí, byť k tomu zjevně mnoho nechybí.

LITERATURA

- [1] Gardner, M.: Strong Laws of Small Primes, *The Last recreations*, New York: Copernicus, 1997, 191–205.
- [2] Golomb, S. W.: The Evidence for Fortune's Conjecture, *Mathematics Magazine*, 54 (1991), 209–210.
- [3] Guy, R. K.: The Second Strong Law of Small Numbers, *Mathematics Magazine*, 53 (1990), 3–20.
- [4] Guy, R. K.: The Strong Law of Small Numbers, *American Mathematical Monthly*, 95 (1988), 697–712.

SFÉRICKÁ GEOMETRIE

Hana Turčinová

MOTIVAČNÍ ÚLOHA

Položme si pro začátek dvě otázky:

Je pravda, že každý trojúhelník má součet velikostí vnitřních úhlů 180° ?

Je tedy pravda, že trojúhelník má nejvýše jeden pravý úhel?

Odpovědi na ně mohou být pro čtenáře nedotčené neeukleidovskou geometrií poněkud překvapivé. Ani jedna z těchto odpovědí totiž není kladná. Proč tomu tak je se pokusí odhalit následující řádky.

VŠE ZAČÍNÁ U EUKLEIDA

Řecký filosof Eukleidés z Alexandrie (asi 365–280 př. n. l.) sepsal 13 knih pod souhrnným názvem Základy. Jedná se o jeden z prvních pokusů jednoznačně pojmenovat a definovat základní geometrické objekty a popsat vztahy, které se mezi nimi nacházejí. Z dnešního pohledu se mohou zdát Eukleidovy definice poněkud nepřesné (například definice úsečky by v Eukleidově pojetí zněla nějak takto: „Čára je délka bez šířky.“), avšak význam Základů pro dějiny matematiky je obrovský. Od Eukleidových Základů se na dlouhou dobu odvíjelo veškeré dění v Řecké geometrii. Byly dokonce tolikrát opsány, že není snadné dohledat jejich původní znění.

Eukleidés ve svých Základech položil pět postulátů, neboli prvoúkolů.

1. *Vytvořit úsečku, která spojuje dva dané body.*
2. *Danou úsečku na jedné i druhé straně libovolně prodloužit.*
3. *Vytvořit kruh o daném středu, na jehož obvodě leží daný bod.*
4. *Všechny pravé úhly jsou si rovny.*
5. *Jestliže úsečka protíná dvě úsečky tak, že na jedné straně je součet vnitřních přilehlých úhlů menší než dva pravé úhly, pak lze na této straně úsečky prodloužit tak, aby se tato jejich prodloužení protla.*

Všimněme si, že pátý postulát je poněkud komplikovanější než ostatní. Možná i proto se po staletí matematici pokoušeli dokázat, že pátý postulát je zbytečný a implikují jej předešlé. Výsledkem jejich snah však byla jen ekvivalentní znění pátého postulátu:

Součet vnitřních úhlů trojúhelníka je roven dvěma pravým.

K dané přímce a bodu mimo ni lze sestrojit právě jednu rovnoběžku, která prochází daným bodem. (Rovnoběžky jsou podle Eukleida definovány jako takové úsečky, které leží v téže rovině a jejichž jakákoli prodloužení se neprotínají.)

Až roku 1829 Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1792–1856) světu odhalil geometrii, ve které platí první čtyři postuláty a neplatí zde pátý: hyperbolickou geometrii. Tím bylo ukázáno, že pátý postulát neplyne z předchozích, a také, že Eukleidés už o dva tisíce let dříve dobře věděl, že pro svou geometrii pátý postulát opravdu potřebuje.

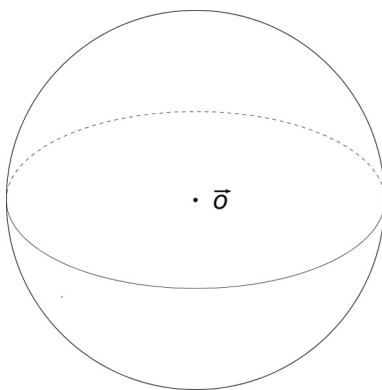
Geometriím, které splňují všech pět postulátů, se začalo říkat eukleidovské, a ty, které nesplňují pátý postulát, se nazývají neeukleidovské. Mezi ně patří hyperbolická geometrie, Riemannova geometrie, eliptická geometrie a tedy i sférická geometrie jako její speciální případ.

SFÉRA A CO NA NÍ NAJDEME

Co je to vlastně ta sféra? Než se pustíme do hrátek na našem novém sférickém hřišti, musíme si je nejprve vymežit.

Definice 1 *Jednotkovou sférou nazveme množinu bodů*

$$\mathbb{S}^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}.$$



Obr. 1

Definice 2 *Hlavní kružnici na sféře $\mathbb{S}^2$ je libovolná kružnice $k \in \mathbb{S}^2$ jednotkového poloměru. Hlavní kružnice nazýváme též přímkami na sféře. Úsečkou na sféře rozumíme libovolný oblouk hlavní kružnice délky menší nebo rovné π .*

Je zřejmé, že pro každou dvojici bodů $A, B \in \mathbb{S}^2$, které jsou různé ($A \neq B$) a které nejsou protilehlé ($A \neq -B$), existuje právě jedna úsečka na sféře spojující tyto dva body (je částí hlavní kružnice, která je průnikem sféry $\mathbb{S}^2$ a roviny určené počátkem soustavy souřadnic a body A a B).

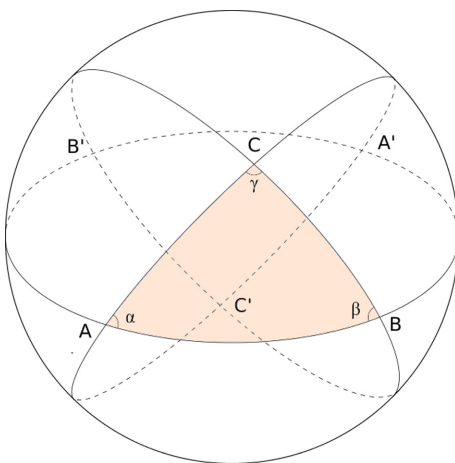
Vraťme se na okamžik k ověření neeukleidovskosti sférické geometrie. Vezměme například poslední uvedené znění pátého postulátu, tzv. existenci rovnoběžek. Všimněme si, že jakékoli dvě hlavní kružnice (tedy přímky na sféře) se protínají alespoň ve dvou bodech. To znamená, že na sféře neexistují rovnoběžky, a tedy neplatí pátý postulát.

Definice 3 *Vzdálenost bodů A, B na sféře S^2 je definována jako délka úsečky spojující tyto body.*

Lze ukázat, že délka libovolné křivky na sféře spojující dva body je větší nebo rovna vzdálenosti těchto bodů a rovnost nastává právě tehdy, jedná-li se o úsečku. To pěkně koresponduje s fakty v eukleidovské geometrii, například s Archimédovým postulátem pro porovnávání délky křivek: ze všech linií, které mají společné koncové body, je rovná čára nejkratší. S dalšími a dalšími definicemi se nám začíná objevovat smysluplný model geometrie.

Definice 4 *Budťe AB a AC dvě úsečky na sféře s délkami z intervalu $(0, \pi)$. Úhel sevřený těmito úsečkami definujeme jako úhel sevřený polorovinami $\overrightarrow{oAB}$ a $\overrightarrow{oAC}$.*

Definice 5 *Budťe dány tři různé body $A, B, C \in S^2$ takové, že vektory z počátku $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ jsou lineárně nezávislé. Úsečky AB, AC a BC vymezují dvě oblasti na sféře, z nichž tu o menším obsahu nazýváme sférický trojúhelník $\triangle_{ABC}$.*



Obr. 2

Tím jsme si vymezili dostatek pojmů a nyní můžeme začít zkoumat jejich vlastnosti.

ZVLÁŠTNOSTI SFÉRICKÉHO TROJÚHELNÍKA

Nejzábnější (a, jak později zjistíme, také nejšikovnější) hráč na sférickém hřišti pro nás jistě bude sférický trojúhelník. Uvedme si pro začátek jedno tvrzení, jehož samotné znění může být poměrně překvapivé a nezvyklé, pokud se dosud setkáváme jen s trojúhelníky v rovině, ale pěkný důkaz nás záhy přesvědčí o jeho pravdivosti.

Věta 1 *Plošný obsah sférického trojúhelníka $\triangle_{ABC} \subset \mathbb{S}^2$ je roven*

$$S(\triangle_{ABC}) = \alpha + \beta + \gamma - \pi,$$

kde α, β, γ jsou velikosti vnitřních úhlů trojúhelníka u vrcholů A, B, C .

Důkaz Označme $A' := -A$, $B' := -B$ a $C' := -C$ jako na obrázku 2.

Sféra je nyní rozdělena na osm trojúhelníků:

$$\mathbb{S}^2 = \triangle_{ABC} \cup \triangle_{ABC'} \cup \triangle_{AB'C} \cup \triangle_{A'BC} \cup \triangle_{AB'C'} \cup \triangle_{A'B'C} \cup \triangle_{A'BC'} \cup \triangle_{A'B'C'},$$

přičemž se jedná čtyři dvojice vzájemně středově symetrických trojúhelníků, tedy i majících stejný obsah (taková dvojice je například $\triangle_{ABC}$ a $\triangle_{A'B'C'}$ nebo $\triangle_{A'BC}$ a $\triangle_{AB'C'}$). Dále platí

$$S(\mathbb{S}^2) = 4\pi,$$

$$S(\mathbb{S}^2) = 2S(\triangle_{ABC}) + 2S(\triangle_{A'BC}) + 2S(\triangle_{AB'C}) + 2S(\triangle_{ABC'}),$$

a proto

$$2\pi = S(\triangle_{ABC}) + S(\triangle_{A'BC}) + S(\triangle_{AB'C}) + S(\triangle_{ABC'}). \quad (1)$$

Dále si všimněme, že sjednocením příslušných trojúhelníků (například $\triangle_{ABC}$ a $\triangle_{A'BC}$) dostaneme část sféry výhodného tvaru (který by se dal připodobnit slupce mandarinky příslušící jednomu měsíčku), jejíž velikost závisí pouze na úhlu (v případě trojúhelníků $\triangle_{ABC}$ a $\triangle_{A'BC}$ pak úhlu α) a jejíž obsah se dá tedy snadno vypočítat. (Když úhel π totiž odpovídá celé polokouli a daný úhel odpovídá části tvaru měsíčku, ve stejném poměru se to přenáší i na plošné obsahy příslušných objektů, přičemž obsah poloviny sféry známe.)

$$S(\triangle_{ABC}) + S(\triangle_{A'BC}) = 2\pi \cdot \frac{\alpha}{\pi} = 2\alpha,$$

$$S(\triangle_{ABC}) + S(\triangle_{AB'C}) = 2\beta,$$

$$S(\triangle_{ABC}) + S(\triangle_{ABC'}) = 2\gamma.$$

Sečtením získaných rovnic dostaneme

$$3S(\triangle_{ABC}) + S(\triangle_{A'BC}) + S(\triangle_{AB'C}) + S(\triangle_{ABC'}) = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma.$$

Dosazením vztahu (1) pak získáme

$$2S(\triangle_{ABC}) + 2\pi = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma,$$

a po úpravě konečně

$$S(\triangle_{ABC}) = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

□

Pro zajímavost uvedme bez důkazu ještě několik dalších vět týkajících se sférického trojúhelníka, jejichž obdobu známe z eukleidovské geometrie.

Věta 2 (sinová věta ve sférické geometrii) *Pro sférický trojúhelník $\triangle_{ABC} \subset \mathbb{S}^2$ se stranami délek a, b, c a velikostmi protilehlých úhlů α, β, γ platí*

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$

Věta 3 (kosinová věta ve sférické geometrii) *Pro sférický trojúhelník $\triangle_{ABC} \subset \mathbb{S}^2$ se stranami délek a, b, c a velikostmi protilehlých úhlů α, β, γ platí*

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma.$$

Důsledkem kosinové věty je obdoba Pythagorovy věty.

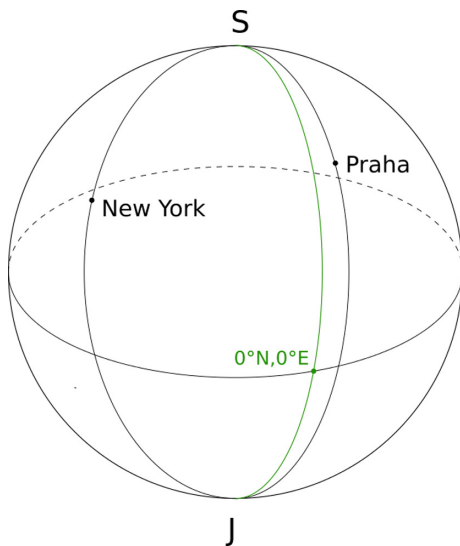
Věta 4 (Pythagorova věta ve sférické geometrii) *Pro pravoúhlý sférický trojúhelník $\triangle_{ABC} \subset \mathbb{S}^2$ se stranami délek a, b, c a velikostmi protilehlých úhlů α, β, γ , ($\gamma = \frac{\pi}{2}$), platí*

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b.$$

SFÉRICKÉ HŘIŠTĚ V PRAXI

Neeukleidovské geometrie se zdají být v každodenním životě poměrně nepraktickou, spíše teoretickou záležitostí (pokud zrovna neprojektujete třeba chladicí věž elektrárny), ale u sférické geometrie tomu tak úplně není. Žijeme na planetě, která má tvar tzv. geoidu, který má nejbližše k rotačnímu elipsoidu, ale můžeme jej připodobnit i ke kouli. Materiál, který jsme si připravili v předchozích částech se nám pak může hodit k všelijakým měřením vzdáleností, úhlů a zeměpisné polohy na Zemi.

Úloha 1 Vypočtete vzdálenost z Prahy ($50^\circ 05' \text{ s. š.}, 14^\circ 25' \text{ v. d.}$) do New Yorku ($40^\circ 42' \text{ s. š.}, 74^\circ \text{ z. d.}$).



Obr. 3

Řešení: Dle dříve zmíněných definic je vzdálenost rovna délce cesty z Prahy do New Yorku po hlavní kružnici (taková cesta se nazývá ortodroma). Když uvážíme tuto hlavní kružnici, na sféře lze nyní najít trojúhelník, díky kterému vypočítáme vzdálenost Praha–New York.

Provedme výpočet nejprve na jednotkové sféře, poté se vraťme k zeměkouli. Označme délku úsečky Praha–severní pól jako a , New York–severní pól jako b , Praha–New York jako c a velikost úhlu, který svírá New York, severní pól a Praha, označme γ .

Pak

$$\begin{aligned} a &= 90^\circ - 50^\circ 05' = 39^\circ 55' \doteq 39,9167^\circ, \\ b &= 90^\circ - 40^\circ 42' = 49^\circ 18' = 49,3^\circ, \\ \gamma &= 14^\circ 25' + 74^\circ = 88^\circ 25' \doteq 88,4167^\circ. \end{aligned}$$

Nyní můžeme aplikovat kosinovou větu

$$\begin{aligned} \cos c &= \cos(39,9167^\circ) \cdot \cos(49,3^\circ) + \\ &\quad + \sin(39,9167^\circ) \cdot \sin(49,3^\circ) \cdot \cos(88,4167^\circ) = 0,51358 \end{aligned}$$

a aplikací inverzní funkce k funkci kosinus dostaneme $c = 59,0973^\circ$, což je vzdálenost Praha–New York příslušná jednotkové sféře.

Na velikost Země se vrátíme jednoduchým výpočtem, využijeme poměru celé hlavní kružnice a její části:

$$l = 2\pi R_z \cdot \frac{59,0973^\circ}{360^\circ} = 6\,578,54 \text{ km},$$

kde R_z je poloměr zeměkoule a l je reálná vzdálenost z Prahy do New Yorku.

Jak vyplývá z předchozích definic, ortodroma je nejkratší spojnici dvou bodů na Zemi. Když však poletíte letadlem, uletíte vzdálenost větší: poletíte totiž po tzv. loxodromě, křivce, která protíná poledníky stále pod stejným úhlem. Důvodem je snadnější udržování kursu.

LITERATURA

- [1] Eukleidés: *Základy. Knihy I–IV*. 1. vyd. OPS, 2008. 154 s.
ISBN 80-903773-6-X
- [2] Koudela, L.: *O pojetí křivky*. 1. vyd. Kanina: OPS, 2013. 267 s.
ISBN 978-80-87269-31-2
- [3] Rataj, J.: Studijní text k přednášce:
http://www.karlin.mff.cuni.cz/rataj/DG/geom_2016.html
- [4] Wikipedia: https://cs.wikipedia.org/wiki/Neeukleidovsk%C3%A1_geometrie

ZAPOJME SVÉ STUDENTY (ANEB POMŮCKY NEMUSÍ BÝT DRAHÉ...)

Drahomír Zrůst

Po přechodu ze základní školy na gymnázium jsem zjistil, že pomůcky, které jsem považoval za samozřejmost, (byly to ještě staré dobré centrální dodávky), na střední škole jaksí chybí. Chtít dělat jakékoliv pokusy se žáky bez jediné žákovské soupravy je velmi problematické a na zakoupení těch současných (při jejich cenách) bychom museli v kotelně natrefit na „zlatou žílu“. Proto jsem se pokusil vymyslet řešení této situace tak, aby studenti byli nápomocní (k vlastnoručně vyrobeným pomůckám mají určitě lepší vztah) a zároveň toto řešení nebylo drahé. Předkládám Vám dva náměty, které jsme s úspěchem realizovali a které nejen že vylepšily vzhled učebny fyziky, ale pomohly i nedostatku žákovských souprav.

PROJEKT „OKNO DO VESMÍRU“

V rámci „Země a vesmír“ v učivu kvarty (9. třídy) jsme se rozhodli „dovyzdobit“ prázdnou část zadní stěny učebny fyziky tímto projektem. Původní, více realistický, záměr poněkud nevyšel, protože pokud dodržíte modelově rozměry těles, nelze dodržet jejich vzdálenosti. A dodržíte-li vzdálenosti, některá tělesa prostě nenajdete. Takže trochu „za pochodu“ vznikl tento kompromis...

Navrhli jsme a vyrobili 12 desek zahrnujících 8 planet Sluneční soustavy, Slunce, Měsíc, Pluto (jako zástupce planetek a nedávného člena skupiny planet) a Galaxii. Základním materiálem na výrobu byly desky polystyrenu tloušťky



3 cm, potažené bílým papírem (role od firmy Epson), lepeného pouze z boku a vzadu lepidlem Herkules, aby hlavní plocha nebyla lepidlem zvlhněna. Na modely těles byly použity polystyrénové koule ze zahradnických potřeb (jsou prodávány jako dvě sestavitelné polokoule, což ušetřilo řezání). Tělesa byla studenty nabarvena podle fotografií z internetu v rámci hodiny výtvarné výchovy – mezi předmětové vztahy fungují a mohou vřele doporučit. Názvy planet byly vyřezány z odpadového polystyrénu (studenti ochotně sehnali z krabic od domácích spotřebičů), a nabarveny akrylovými barvami (včetně boků – zvýšila se prostorovost nápisů). Texty byly převzaty z internetu – studenti sami vybírali to, co považují za důležité – a doplněny několika obrázky podlepenými polystyrénem různé síly. Vzniklý soubor byl umístěn mezi dřevěné lišty tak, aby bylo možno jednotlivé desky snadno vysouvat a měnit případně za jiné panely v budoucnosti.

Práce studentům šla hezky od ruky, získali nové dovednosti i znalosti. Projekt je zcela pohltit a sami si vyhledávali spoustu informací o problematice navíc. Po dokončení projektu škola slavila 120. výročí založení a velké množství návštěvníků, zejména z řad bývalých studentů, kladně hodnotilo výsledek našeho snažení. Nejvíce pak potěšilo i hodnocení starších studentů, kteří v hloučcích výsledek hodnotili svým obvyklým „To je hustý...“.

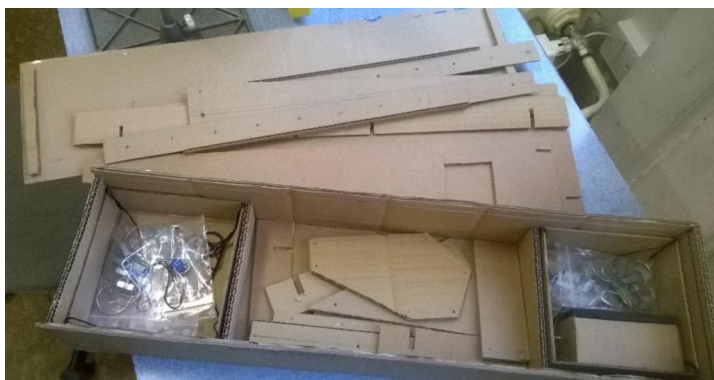


ŽÁKOVSKÁ SOUPRAVA PRO MECHANIKU

Velmi populární a hravou laboratorní prací je ověření rovnováhy na páce. Pokud ovšem máte pomůcky. U nás nebylo nic, a tak jsme s kolegou vymysleli první prototyp s využitím klasických kovových stojanů, dřevěné lačky a stabilizace ramena pomocí dalších dvou. Ověřili jsme si jejich snadnou využitelnost a výborné vlastnosti. Bohužel problém byl jednak v použitých stojanech, které byly využívány i v laboratoři a jejich přenášení nebylo nic příjemného, tak v následném uložení pomůcek – byly neskladné a překážely. Proto vznikla tato druhá

varianta, která jednak řeší skladování, nevyužívá kovové stojany, a navíc stlačila pořizovací cenu skoro k nule. Jako výborný materiál se osvědčil karton z krabic, kterého je všude spousta a navíc má potřebnou pevnost.

Na výrobu takovéto stavebnice vlastně potřebujete pouze karton, několik šroubků na sestavení ramena páky, kousek vázacího drátu na háčky (závaží a upevnění misek) a bavlnku na různé závěsy. Cena jedné sady, která umožňuje zmíněnou laboratorní práci, práci s rovnoramennými vahami, těžiště tělesa, výklad třecí síly, se pohybuje v řádu max. několika desítek korun a přináší i další pozitivita. Sada je umístěna v krabičce (vyrobené z kartonu), která umožňuje snadné přenášení a skladování, sadu můžete s prakticky nulovými náklady rozšiřovat o další prvky ze stejných materiálů a pokrýt tak kompletní pokusy z mechaniky (chystáme se sadu doplnit např. o siloměry). A hlavně každý rok mám další „práci“ pro studenty, kteří pak sadu berou jako svou a chovají se k ní daleko ohleduplněji než k pouze rozdaným pomůckám.





Pokud Vás zmíněná myšlenka zaujala nebo se Vám zalíbila prezentace první etapy stavebnice na letní škole, můžete mě kontaktovat na mailu zrust@glouny.cz a já se Vám budu snažit poskytnout potřebné informace pro případnou výrobu stavebnice.

LETNÍ ŠKOLA
MATEMATIKY A FYZIKY 2016
SBORNÍK PŘÍSPĚVKŮ

Vydavatel: Vydavatelský servis, Plzeň

Editorky: Magdalena Krátká, Pavla Hofmanová

Návrh obálky: Anežka Marková, Jiří Zemaník

Sazba: Miloš Brejcha, Vydavatelský servis, Plzeň
Sazba v $\text{\LaTeX}$ u z písma Computer Modern ve variantě $\mathcal{CS}$ -font

1. vydání, počet stran:

Plzeň, 2016