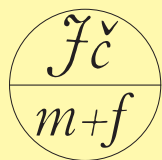




Letní škola matematiky a fyziky

2017

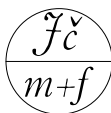
sborník příspěvků



JEDNOTA ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYZIKŮ
POBOČKA V ÚSTÍ NAD LABEM

LETNÍ ŠKOLA MATEMATIKY A FYZIKY 2017

SBORNÍK PŘÍSPĚVKŮ



Text sborníku neprošel jazykovou úpravou.

Vydal: Vydavatelský servis, Plzeň

Editorky: Magdalena Krátká, Pavla Hofmanová, 2017

ISBN 978-80-86843-60-5 (online)

ISBN 978-80-86843-59-9 (brož. vyd.)

OBSAH

SEZNAM AUTORŮ PŘÍSPĚVKŮ	4
Eva Hejnová Co si žáci myslí o atomech	5
Jiří Králík Procházka časoprostorem aneb úvod do geometrických vlastností speciální relativity	19
Jan Krejčí, Pavlína Matysová Pojďme si hrát s programováním	53
Petr Mentlík Glóbus ve tvaru mnohostěnu	59
Jan Petrásek Počítačové simulace ve fyzice	65
Jan Petrásek Pán blesku a hromu, Nikolo Tesla	75
Jiří Příbyl Užití falešného předpokladu (regula falsi) v historii a dnes	83
Hana Turčinová, Zuzka Vlasáková Zajímavé nerovnosti	101

SEZNAM AUTORŮ PŘÍSPĚVKŮ

Hejnová Eva – eva.hejnova@ujep.cz
katedra fyziky, Přírodovědecká fakulta UJEP v Ústí nad Labem

Králík Jiří – kralik@gymjat.cz
Gymnázium Jateční, Ústí nad Labem

Matysová Pavlína – matysova.pavlina@seznam.cz
Přírodovědecká fakulta, Přírodovědecká fakulta UJEP v Ústí nad Labem

Mentlík Petr – petr.mentlik@email.cz
ZŠ Rokycanova, Sokolov

Petrásek Jan – petrasek.jan@outlook.com
UFY a UAI, Přírodovědecká fakulta Jihočeské University

Příbyl Jiří – jiri.pribyl@ujep.cz
katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta UJEP v Ústí nad Labem

Turčinová Hana – TurcinovaHana@seznam.cz
Matematicko-fyzikální fakulta UK v Praze

Vlasáková Zuzka – vlasakova.zuzka@seznam.cz
Matematicko-fyzikální fakulta UK v Praze

CO SI ŽÁCI MYSLÍ O ATOMECH

Eva Hejnová

ÚVOD

Na předchozích letních školách jsme se věnovali intuitivním představám žáků na téma síla a pohyb, gravitace a optika. V České republice byla dosud jen velmi malá pozornost věnována atomistice, i když mnohé zahraniční výzkumy [1, 2, 3, 4, 5] ukázaly, že i v této oblasti jsou intuitivní představy (miskoncepce) velmi rozšířené. Proto jsem pro letošní letní školu zvolila toto téma. Učitelé by měli možné chybné představy žáků znát, aby mohli volit vhodné vyučovací postupy a používat srozumitelné modely atomů a vhodné analogie.

Atom je pojem, se kterým se žáci setkávají jak ve fyzice, tak i v chemii. Obtížnost výkladu tohoto pojmu spočívá v tom, že jde o značně abstraktní konstrukt; atom nelze vnímat lidskými smysly a nelze ho vidět ani pomocí jednoduchých přístrojů (např. pomocí lupy nebo mikroskopu). Při výkladu tohoto pojmu proto učitelé používají různé, více, či méně vhodné modely, analogie a metafory (např. elektronový oblak, „rozmazaný“ elektron, atomové jádro apod.). Žáci si však často vytvářejí své vlastní modely a jejich představy se tak mohou značně lišit od představy atomu, kterou se jim snaží předat jejich učitelé.

STRUČNÝ HISTORICKÝ VÝVOJ POJMU ATOM

Protože atom je jeden z nejnázornějších příkladů, jak se historicky k takovému pojmu dospělo na základě nepřímých usuzování, uvedeme nejprve ve stručnosti představy některých nejvýznamnějších starověkých myslitelů. Jejich myšlenky i argumentace jsou zajímavé zejména proto, že se některé jejich představy objevují i u současných dětí (ale pravděpodobně i dospělých) a představují také časté a velmi odolné miskoncepce, jak v dalším textu ukážeme. Kromě toho lze níže uvedené historické poznámky vhodně využít i pro zpestření výuky.

Za prvního atomistu je považován **Leukippos z Miletu** (asi 490–420 př. n. l.), o němž však máme pouze málo zpráv. Atomisté vycházeli z toho, že atomy jsou pouze jednoho druhu (ve smyslu že jsou z téže látky (hmoty, „těsta“)) a je jich nekonečně mnoho. V atomech podle nich není prázdný prostor, tj. jsou plné a pohybují se v prázdném prostoru. Vesmír je v jejich představách nekonečný, jeho část je plná a část prázdná. Vznik atomismu vycházel ve značné míře z potřeby vysvětlit pohyb, který Zénón a další eleaté považovali za nemožný (viz dále jeho učení o nemožnosti pohybu). Atomy podle atomistů musí

nutně pohybovat v prázdném prostoru. Předpoklad prostoru byl nutný pro vysvětlení pohybu, neboť jsou-li podle atomistů všechny atomy z téže látky a celý prostor by byl beze zbytku vyplněn touto stejnou látkou, nebyl by žádný pohyb pozorovatelný.

Atomisté vycházeli také z předpokladu, že látku není možné dělit do nekonečna a že musí existovat konečné, nepatrné, okem neviditelné, kompaktní, tvrdé a dále nedělitelné částčky – atomy (v řečtině znamená slovo „atomos“ nedělitelný), které se neustále pohybují v prázdném prostoru. Obě složky (atomy a prázdný prostor) jsou věčné, neměnné a přechod mezi nimi není možný. Veškeré dění pak spočívá ve spojování, srážení, postrkávání a rozpojování atomů lišících se navzájem velikostí, polohou a tvarem (kulaté, hranaté, udicovité, ...). Vlastnosti látek závisejí na druhu atomů, z nichž jsou složeny, i na jejich uspořádání.

Současníkem Leukippa byl **Zénón z Eleje** (490–430 př. n. l.), jenž zastával nauku o nedělitelnosti bytí a nemožnosti pohybu. Podle něho je pohyb jenom zdání, pravé bytí se nepohybuje a je jedno. Zénón tedy striktně odděloval sféru rozumového vědění a smyslového vnímání. Známé jsou tzv. Zénónovy paradoxy (nazývané také aporie), např. o Achillovi a želvě nebo o Letícím šíp – letící šíp pozorovaný v jakýkoliv okamžik svého pohybu se nachází na jednom místě, ve kterém je de facto v klidu; pokud je ale v klidu v každém okamžiku svého letu, znamená to, že je v klidu i v čase, což znamená, že se nepohybuje. Zénónova argumentace je mylná, nicméně tato úvaha připravila cestu k objevu infinitesimálního počtu.

Žákem Leukippa byl **Démokritós z Abdéry** (asi 460–370 př. n. l.). Podle něj jsou atomy tvrdé, neporušitelné a mají různé tvary. Například duše se skládá ze zvláštního druhu malých kulatých atomů, které se po smrti člověka nezaničují, ale rozptýlí se do prázdného prostoru (stejně kulaté atomy tvoří také oheň). Z těchto atomů mohou různým uspořádáním vznikat různé kvality (ostrá chuť je podle něj způsobena špičatými atomy). Démokritós uznával pouze hmotný svět (vše je tvořeno atomy), proto bývá považován za největšího „materialistu“ starověku. Traduje se, že na myšlenku atomismu přišel údajně tak, že ležel v posteli a ve vedlejší místnosti pekla jeho sestra chléb. Přemýšlel, jak je možné, že se vůně chleba dostala až k němu. Představoval si bochníky chleba složené z drobných částček, které se od celku odtrhnou a pohybují se vzduchem, až doputují k němu.

Hlavním odpůrcem atomistů byl **Platón** (427–347 př. n. l.). I u něj lze nalézt jakési základní stavební jednotky. Platón učí o pěti základních živlech (oheň, země, vzduch, voda a éter), které se skládají z miniaturních částic (mnohostěnnů), které nejsou již dále dělitelné. Všechny materiály na Zemi jsou pak sloučeniny čtyř elementů (oheň – čtyřstěn, země – krychle, vzduch – osmistěn, voda – dvacetistěn). Éter, z něhož jsou např. vytvořena nebeská tělesa (Slunce, hvězdy, ostatní planety), je složen z částic, které mají tvar dvanáctistěnu (odtud také 12 znamená zvěrokruhu). Éter se ale nemůže míchat s ostatními čtyřmi živly.

Podle Platóna však geometrická tělesa vytvářejí pouze hmotný svět, skutečný svět je svět idejí. Proto také bývá Platón považován za nejvýznamnějšího „idealistu“ starověku.

Podle Platónova žáka **Aristotela** (384–322 př. n. l.) jsou látky složeny z malíčkých kuliček jednotlivých živlů (např. z částíček vzduchu, které se dají dále dělit), jež jsou hustě „nasety“ bez mezer, prázdný prostor (vakuum) podle něho neexistuje (viz známá představa „horror vacui“). Prostor je vždy místo zaujímané tělesem, proto prostor bez tělesa nemůže existovat. Protože podle Aristotela existuje více druhů látek (živlů), může být vysvětlen pohyb bez potřeby prázdného prostoru.

Nauku atomistů dále rozvinul **Epikúros** (341–270 př. n. l.), jehož učení shrnul **Titus Lucretius Carus** (97–55 př. n. l.) ve své básni „O přírodě“ (De rerum natura), ve které podává soustavný výklad atomismu.

Protože atomistická nauka odporovala běžné lidské zkušenosti o spojitosti a dělitelnosti látky, upadla během středověku v zapomnění (ve středověku byla dávana přednost především aristotelským představám). Znovu se pak objevila až v novověké filosofii.

OD ZACHOVÁNÍ HMOTNOSTI A OBJEMU K ATOMISMU

Věnujme nyní pozornost propedeutice pojmu atom. Předpokladem pro vytvoření pojmu atom je schopnost dítěte vnímat u věcí jako neměnnou podstatu hmoty (tj. ve smyslu, že hmota nemůže jen tak bez ničeho zmizet) a dále, že se zachovává hmotnost a objem. K tomu zpravidla dochází mezi 7 a 12 lety. To lze ověřovat pomocí vhodných otázek, které dětem klademe. Uveďme dále některé základní otázky a časté miskoncepce, které se mohou u dětí v souvislosti s nimi objevit.

1. *Když rozpustíme krystalky cukru ve vodě, nejsou v ní pak vidět. Co se s nimi stane?*

Miskoncepce:

- Cukr přestane po rozpuštění existovat.
- Částice cukru se vypaří.
- Cukr ve vodě vytvoří „kapky cukru“.
- Cukr se rozpadne na menší kousky, které se nachází ve (spojité) vodě.
- Částice cukru se sloučí s vodou a vytvoří nové chemické prvky.
- Molekuly cukru vyplní (beze zbytku) prostor mezi molekulami vody.

2. *Změní se hmotnost sklenice s vodou, když v ní rozpustíme cukr?*

Miskoncepce:

- Když se pevná látka rozpustí ve vodě, nepřispívá k hmotnosti roztoku (částice nebo molekuly cukru ztratí po rozpuštění hmotnost, takže pak mají zanedbatelnou nebo nemají žádnou hmotnost).
- Cukr nasaje vodu, a roztok bude mít proto menší hmotnost.

3. *Kostku cukru vložíme do odměrného válce s vodou. Co se stane s výškou hladiny, jestliže se kostka cukru ještě nerozpustila? Co se stane s výškou hladiny po rozpuštění kostky cukru?*

Miskoncepce:

- Když se cukr rozpustí, ztratí svoji hmotnost (resp. objem) – buď úplně, nebo částečně.

Pro ověření, zda děti rozumí, co se rozumí zachováním hmoty a objemu, lze také využívat úlohy z **Lawsonova testu** [6].

1. Máte dvě hliněné kuličky stejné velikosti a tvaru. Obě kuličky mají také stejnou váhu. Jedna kulička je pak splácnuta do tvaru koláčku.

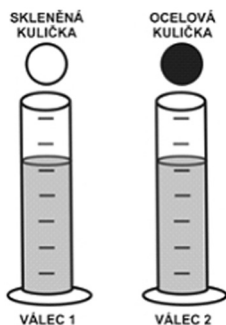
Které z následujících tvrzení je správné?

- Splácnutý kousek hlíny váží víc než kulatý,
- Oba kousky váží stejně,
- Kulička váží víc než splácnutý kousek,

2. protože

- splácnutý kousek pokrývá větší plochu,
- kulička tlačí dolů víc na jednom místě,
- když se něco splácne, ztratí to na váze,
- hlína nebyla přidána ani odebrána,
- když se něco splácne, získá to na váze.

3. Na obrázku 1 jsou dva válce naplněné vodou do stejné výšky. Válce mají stejnou velikost a tvar. Na obrázku jsou ukázány také dvě kuličky, jedna skleněná a jedna ocelová. Kuličky jsou stejně velké, ale ocelová je mnohem těžší než skleněná.



Obr. 1

Když je skleněná kulička vložena do válce 1, potopí se na dno a voda stoupne k šesté značce.

Jestliže vložíme ocelovou kuličku do válce 2, voda stoupne:

- a) do stejné výšky jako stoupala ve válci 1,
- b) do větší výšky než do níž stoupala ve válci 1,
- c) do menší výšky než do níž stoupala ve válci 1,

4. protože

- a) ocelová kulička se potopí rychleji,
- b) kuličky jsou z různých materiálů,
- c) ocelová kulička je těžší než skleněná,
- d) skleněná kulička vyvolá menší tlak.
- e) kuličky mají stejnou velikost.

Piaget na základě svých výzkumů vytvořil **teorii vývoje atomismu**, která má několik následujících fází:

- pre-atomismus: děti věří, že cukr přestává existovat ihned po rozpuštění, a to i navzdory důkazům jako je sladká chuť a změna hmotnosti, neexistuje u nich ještě žádné spojení mezi přímou interpretací a jejich vizuální zkušeností;
- primitivní atomismus: na základě přítomnosti chuti si děti již myslí, že substance (cukr) musí ve vodě přetrvávat a že je také odpovědná za chuť. Částičky cukru považují ale za příliš malé, aby měly nějakou hmotnost nebo objem;
- další vývoj: součet hmotností malých částiček cukru musí být rovna hmotnosti kostky cukru;
- konečné stadium: objem částiček cukru se zachovává, voda se vytlačí, protože každá malá částice zaujímá nějaký objem a součet individuálních objemů je roven objemu kostky.

Není ale zcela jasné, zda děti mají představu, že voda se také skládá z nějakých částic (molekul). Mladší děti často nenakreslí molekuly vody, ale jen nějaké částice cukru a vodu považují za jakési kontinuum (často to tak chápou i starší děti).

PŘEHLED INTUITIVNÍCH PŘEDSTAV V ATOMISTICE

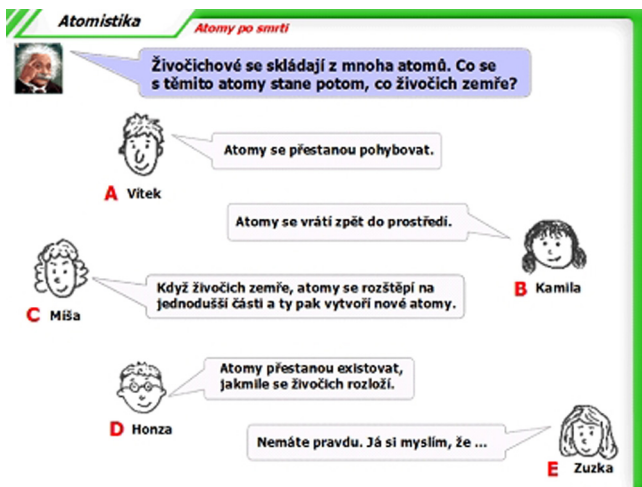
Níže předkládáme úlohy, které mohou učitelům pomoci s odstraněním chybných představ v oblasti atomistiky. U každé úlohy uvádíme přehled nejčastějších miskoncepcí, které stručně komentujeme.

JAK JSME PŘEDSTAVY ŽÁKŮ O ATOMECH ZJIŠŤOVALI?

Představy žáků jsme zjišťovali pomocí testu, který byl sestaven ze 14 úloh zaměřených na nejčastější miskoncepce v oblasti atomistiky. Žáci vybírali vždy jednu odpověď ze čtyř nabízených možností a měli také možnost u každé úlohy doplnit vlastní odpověď. Test jsme zadali v květnu červnu 2017 170 žákům z šesti základních škol a jedno gymnázia v Ústeckém, Moravskoslezském kraji a v Praze). I když se děti setkávají s prvními modely atomu zpravidla již v 6. ročníku základní školy, učivo z atomové a jaderné fyziky je nejčastěji zařazeno do 9. ročníku. Představy žáků jsme proto zjišťovali na konci 9. ročníku, kdy již lze předpokládat ucelenější poznatky v oblasti atomové a jaderné fyziky. Na řešení testu měli žáci přibližně 20 minut.

ÚLOHY

Úlohy, které byly formulovány na základě testu, jsou vytvořeny ve formě concept cartoons (obr. 2). O těchto úlohách lze nalézt podrobnější informaci např. v [7]. U každé úlohy je vždy nejprve uvedena otázka, poté pak následují názory, které vyslovují jednotliví mluvčí, u nichž jsou pro usnadnění diskuse uvedena jména. Jednotlivá tvrzení pak představují nejčastější miskoncepce, přičemž děti mohou vyslovit i vlastní odpověď (tato možnost je zařazena vždy jako poslední a je uvedena slovy „Nemáte pravdu. Já sis myslím, že...“).



Obr. 2

Níže uvádíme k jednotlivým úlohám vždy nejprve správnou (resp. nejvhodnější) odpověď (včetně procentuálního výskytu těchto odpovědí ve zkoumaném vzorku žáků) a ostatní odpovědi představující nejčastější miskoncepce, které

jsou řazeny od těch nejfrekventovanějších k těm méně častým (v závorce opět uvádíme procento jejich výskytu). U některých úloh uvádíme pro zajímavost i příklady vlastních odpovědí žáků. Ke každé úloze uvádíme také komentář, ve kterém popisujeme pravděpodobné zdroje chybných představ a ukazujeme, kde mohou být různá úskalí ve výkladu.

Úloha 1 Neviditelné atomy

Můžeme jednotlivé atomy vidět?

Ano, atomy můžeme vidět, ale pouze pomocí speciálního laboratorního přístroje. (74,7 %)

Miskoncepce:

- Ne, atomy nelze vidět, můžeme pouze věřit, že existují. (15,3 %)
- Ano, atomy jsou dost velké na to, abychom je mohli vidět pod běžným mikroskopem. (5,9 %)
- Ano, velké atomy lze vidět i pouhým okem (2,4 %).

Komentář: Žáci mají mikroskop spojený s představou, že umožňuje pozorovat „velmi malé“ věci. Někteří z nich se proto domnívají, že atomy lze vidět pod mikroskopem nebo dokonce i pouhým okem. O tom, že tomu tak není, se mohou děti jednoduše přesvědčit (např. pozorováním vody pod mikroskopem – molekuly vody jistě neuvidí).

I když si mnoho žáků nakonec vytvoří představu, že atom nebo molekula je nejmenší stavební jednotka hmoty, mají pak často problém porozumět nepatrnosti atomu nebo molekuly. Někdy si proto děti pak mohou myslet, že když jsou částice tak malé, musí mít nulovou nebo zápornou hmotnost [1] (viz také úloha 6).

Úloha 2 Živé atomy

Jsou atomy živé?

Ne, atomy nemají vlastnosti živých organismů. (68,8 %)

Miskoncepce:

- Ano, protože atomy mohou růst a dělit se. (13,5 %)
- Živé jsou pouze atomy živých organismů. (8,8 %)
- Ano, atomy jsou živé, protože se pohybují. (5,9 %)

Komentář: Miskoncepce týkající se animismu, tj. představa, že atom je živý (má vlastnosti živých organismů), patří k těm nejrozšířenějším (v našem výzkumu odpovědi tohoto typu představovaly v součtu přibližně 28 %). Kromě výše uvedených miskonceptů vycházejících z animismu si někdy děti myslí, že atomy se mohou snadno dělit a tak se reprodukovat a také že pouze neživé věci jsou složeny z atomů, ale živé věci jsou tvořeny z rostlinných nebo živočišných buněk [3].

Úloha 3 Atomy po smrti

Živočichové se skládají z mnoha atomů. Co se s těmito atomy stane potom, co živočich zemře?

Atomy se vrátí zpět do prostředí. (21,2 %)

Miskoncepce:

- Když živočich zemře, atomy se rozštěpí na jednodušší části a ty pak vytvoří nové atomy. (47,7 %)
- Atomy přestanou existovat, jakmile se živočich rozloží. (21,2 %)
- Atomy se přestanou pohybovat. (8,8 %)

Komentář: Tato úloha vycházela z výzkumu TIMSS [8], který byl v České republice uskutečněn v roce 1995. Průměrná úspěšnost této úlohy byla u žáků 8. ročníku 22,4 %, přičemž zajímavý u této úlohy byl velký rozdíl mezi úspěšností dívek (17,4 %) a chlapců (27,0 %). V našem výzkumu jsme zjistili, že téměř polovina našich žáků se domnívá, že po smrti živočicha se atomy rozštěpí na jednodušší části, které pak vytvoří nové atomy. V souhrnu představují odpovědi týkající se miskoncepce spojených se změnou atomů po smrti (rozpad, zánik nebo zastavení pohybu atomů) téměř 78 %, což je poměrně závažné zjištění. Tato skutečnost může souviset s tím, že žáci zaměňují atomy a buňky (viz odpověď jednoho žáka: „Zvíře, které zemře, tak se pomalu rozkládá a mizí, stejně tak atomy v jeho těle.“).

Úloha 4 Tvar atomů

Jaký mají atomy tvar?

O atomu lze pouze říci, že má kladné jádro a elektronový obal. (37,1 %)

Miskoncepce:

- Atomy mají tvar koulí, které jsou uvnitř plné. (31,8 %)
- Atomy mohou mít různý tvar podle druhu látky, kterou tvoří (mohou být třeba kulaté, vejčité, protáhlé apod.). (24,7 %)
- Atomy jsou ploché (jako když rozpláceme kuličku z modelíny). (2,9 %)

Komentář: Děti si na základě předkládaných modelů atomů (vesměs kulových) často vytvářejí představu atomu jako tvrdé a tuhé kuličky. Odpovědi žáků také naznačují, že zřejmě dobře nerozlišují mezi atomem a molekulou (viz také úloha 5 a 6). Jak již bylo výše uvedeno, děti si poměrně často myslí, že atomy jsou jako buňka, protože také mají jádro a obal, který jádro chrání. Někdy si žáci myslí, že jádro kontroluje „aktivitu“ atomu [3]. V tomto případě se jedná o tzv. interferenci (tj. zápornému přenosu učení – „co umím teď, ruší, co se budu učit v budoucnu“). Je proto třeba dobře rozlišovat mezi jádrem buňky a jeho funkcemi a jádrem atomu. Při výkladu je třeba žáky upozornit zejména na významné odlišnosti, např. že elektrony netvoří pevný obal kolem jádra nebo že atom po smrti živočicha nezaniká.

Úloha 5 Velikost atomů

Mají všechny atomy stejnou velikost?

Nemají, protože velikost atomu určuje počet protonů, neutronů a elektronů, z nichž je atom složen. (54,1 %)

Miskoncepce:

- Nemají, protože velikost atomu určuje pouze počet protonů a neutronů v jádře atomu. (22,4 %)
- Všechny atomy jsou stejně velké, ale vytvářejí různé velké molekuly. (20,6 %)
- Mají, protože ve vesmíru existuje jen jeden základní druh atomu, ze kterého jsou vytvářeny všechny složitější atomy. (2,9 %)

Komentář: Co se týče velikosti atomu, kromě výše uvedených miskonceptů mívají děti často značně zkreslené představy o rozměrech atomu. Myslí si, že jestliže má jádro v průměru 5 cm, elektrony se nacházejí od jádra ve vzdálenosti v rozmezí od 2–10 mm do 50 cm (ve skutečnosti to je 5 km), někteří žáci si dokonce myslí, že se elektrony dotýkají jádra [3]. Tyto představy jsou zřejmě i důsledkem modelů atomu používaných v učebnicích, které neznázorňují obvykle správné rozměry atomového jádra a obalu.

Úloha 6 Hmotnost atomů

Mají všechny atomy stejnou hmotnost?

Ne, protože atomy mají různý počet protonů, neutronů a elektronů. (65,3 %)

Miskoncepce:

- Ne, protože hmotnost atomu závisí na tom, z kolika jednodušších atomů vytvořen. (20,6 %)
- Ano, všechny atomy jsou částice se stejnou hmotností. (6,5 %)
- Ne, protože atomy plynů nemají žádnou hmotnost. (4,1 %)

Komentář: První miskoncepce opět ukazuje na to, že děti nemají jasno v pojmu atom a molekula. Kromě námi zkoumaných miskonceptů jsou zajímavé i představy dětí o hmotnostech elementárních částic, děti si často myslí, že elektrony nemají žádnou hmotnost, mají pouze náboj a hmotnost protonu je jeden gram [4].

Úloha 7 Atom zlata

Má atom zlata některé stejné vlastnosti jako malý kousek zlata?

Ne, jednotlivý atom zlata nemá stejné vlastnosti jako kousek zlata. (49,4 %)

Miskoncepce:

- Ne, protože kousek zlata je tvořen atomy zlata a látkou, která vyplňuje prostor mezi atomy zlata. (39,4 %)

- Ano, atom zlata je lesklý, podobně jako se lesknou věci ze zlata. (4,7 %)
- Ano, zlato je tvrdé, a atom zlata je proto také tvrdý. (2,4 %)

Komentář: Děti si ve více než třetině případů myslely, že mezi částicemi (atomy zlata) musí být nějaká látka. Ze zahraničních výzkumů je známo, že touto látkou bývá např. vzduch (nebo také kyslík, případně jiné plyny), různé materiály nebo také elektrické náboje [4]. Podobná představa se objevila také u úlohy 9 a 11, u kterých je uveden další komentář.

Úloha 8 Pohyb atomů

Pohybují se atomy v pevné látce?

Ano, atomy v pevné látce kmitají. (53,5 %)

Miskoncepce:

- Ne, nemohou se pohybovat, protože mezi částicemi v pevné látce nejsou žádné mezery. (22,9 %)
- Ne, atomy se nepohybují, pohybují se jen elektrony v atomových obalech. (20,0 %)
- Ne, nemohou se pohybovat, protože atomy pevné látky jsou těžké. (1,2 %)

Komentář: Děti se jen velmi obtížně odpoutávají od světa, který mohou vnímat svými smysly. Proto často přenášejí vlastnosti makrosvětla na mikrosvět částic. Atomy pak např. považují za malé kousky pevného tělesa nebo malé kapky kapaliny, přičemž tyto kousky mají různou velikost a tvar, není mezi nimi žádný prostor (jsou jakoby „hustě nasety“ vedle sebe) a mají stejné vlastnosti jako materiál, který vytvářejí [1]. Někdy si také myslí, že se pohybují jen elektrony v atomových obalech.

Úloha 9 Zvětšování atomů

Zvětší se atomy v železné tyči, když ji budeme zahřívat?

Při zahřívání tyče se zvětší vzdálenost mezi atomy a rozsah jejich kmitání. (58,2 %)

Miskoncepce:

- Při zahřívání tyče se budou uvolňovat elektrony z atomových jader a atomy se tak zvětší. (18,2 %)
- Při zahřívání zvětšuje svůj objem pouze sama tyč, velikost atomů a vzdálenost mezi nimi se nemění. (17,1 %)
- Při zahřívání tyče se budou zvětšovat pouze jádra atomů. (4,1 %)

Komentář: Roztažnost hmoty s rostoucí teplotou často mylně děti spojují s roztažností (zvětšováním) atomů spíše než se zvětšováním mezer mezi atomy. Druhá

výše uvedená miskoncepce ukazuje na mylnou představu atomů železa nacházejících se v nějakém materiálu (železu), který se sám roztahuje (tj. roztažnost je vlastnost pouze makroskopického materiálu). V zahraničních výzkumech se ukázalo, že když mají děti nakreslit např. měď, nakreslí cosi jako „hrozinkovou bulku“, v níž jsou atomy mědi usazeny jako v jakémsi měděném lůžku (tzv. rozinkový model) [9].

Úloha 10 Uhlí

Uhlí je tvořeno atomy uhlíku. Co se stane s atomy uhlíku, když kousek uhlí rozdělujeme kladivem na prach?

Atomy uhlíku se nijak nezmění. (57,7 %)

Miskoncepce:

- Od některých atomů uhlíku odpadnou malé části, takže se tyto atomy zmenší. (20,0 %)
- Když se uhlí rozpadne na prach, atomy se také rozpadnou. (11,8 %)
- Nárazy kladivem způsobí změnu velikosti atomů. (8,8 %)

Komentář: Všechny miskoncepce opět ukazují, že děti přenášejí makroskopické vlastnosti materiálu (uhlí) na jednotlivé atomy (v souhrnu se jedná přibližně o 40 % respondentů).

Úloha 11 Papír

Představ si, že bychom odstranili všechny atomy listu papíru. Co by potom zůstalo?

Nezůstane nic. (61,8 %)

Miskoncepce:

- Zůstane trochu papírového prachu. (19,4 %)
- Zůstane energie. (8,8 %)
- Zůstane jen maličký kousek papíru o velmi malé hmotnosti. (7,7 %)

Komentář: Jak ukázaly zahraniční výzkumy, představy žáků se v rozmezí 8–17 let postupně mění od kontinua přes kousky kontinua až po naučenou vědeckou reprezentaci částic. Přesto má až 20 % 17letých žáků stále představu hmoty jako spojitého prostředí. I v našem výzkumu se ukázalo, mnohé děti si myslí, že atomy papíru se nacházejí v jakési mateřské substanci. Podobně si žáci často i vodu a vzduch, tj. jako molekuly vody ve vodě nebo částice vzduchu nacházející se ve vzduchu.

Úloha 12 Srážka s atomy

Co se stane s atomy ve vzduchu, když se s nimi srazí rychle se pohybující vlak? Při srážce s vlakem se atomy nijak nezmění. (55,9 %)

Miskoncepce:

- Vzduch je pružný, proto jsou i atomy ve vzduchu pružné, mohou se tak snadno stlačit a při srážce s vlakem se nerozbijí. (31,2 %)
- Jestliže je rychlost vlaku dostatečně velká, některé atomy ve vzduchu se při srážce rozbijí a rozpadnou se na menší části. (7,7 %)
- V okamžiku srážky chrání atomy jejich pevné obaly, podobně jako skořápka chrání ořech. (5,3 %)

Komentář: Děti často přenášejí makroskopické vlastnosti materiálu na mikrosvět. Proto si také myslí, že atom je pružný a může se stlačit nebo natáhnout a pak se zase vrátit do původního tvaru [3]. Někdy si také děti myslí, že atomy jsou odolné, pevné, tvrdé částice, které se nemohou rozbít na menší částice.

Úloha 13 Održení elektronu

Musí být atom rozbit, aby se z něj uvolnil elektron?

Ne, elektron se může odtrhnout bez rozbití atomu. (62,9 %)

Miskoncepce:

- Elektron je jednou ze základních částic, z nichž se atom skládá. Když je elektron od atomu održen, atom se rozdělí. (15,9 %)
- Ne, stačí rozbít pouze obal atomu. (11,8 %)
- Elektrony nemohou být z atomu održeny. (8,2 %)

Komentář: Miskoncepce odhalené v této úloze ukazují na to, že někteří žáci neodlišují dobře mezi ději v elektronovém obalu a jádru a důsledky, k nimž tyto děje vedou (rozbití atomu). Druhá výše uvedená miskoncepce také naznačuje, že pod elektronovým obalem si děti často představují nějakou skořápku, či cosi „tvrdého“, co je třeba rozbít, abychom mohli elektron z atomu odstranit [3]. Při používání termínu elektronový obal by proto měli být učitelé velmi obezřetní a měli by pozornost žáků směřovat spíše k hladinám nebo pozicím elektronů. Mluvíme-li o elektronech, lze využít také využití přirovnání elektronu a zvuku, které uvádí [10] – „ani o elektronu v atomu ani o zvuku v místnosti nelze totiž přesně říci, ve kterém místě je a jak se v daném okamžiku pohybuje“. Na střední škole pak učitelé často používají metaforu, že elektrony jsou v atomu jakoby „rozmazané“.

Úloha 14 Přeměna atomů

Jak se mohou atomy jednoho prvku přeměnit na atomy jiného prvku?

Nestabilní atomy se mohou samovolně změnit na jiné atomy při radioaktivním rozpadu. (55,9 %)

Miskoncepce:

- Atomy se nemohou přeměňovat, protože každý z protonů, neutronů a elektronů v atomu je jedinečný. (22,9 %)
- Příčinou přeměny atomů na jiné atomy je sluneční světlo. (6,5 %)
- Atomy se mohou změnit na jiné atomy při takových jevech jako je hřmění a blýskání. (6,5 %)

Komentář: Poměrně značná část žáků si myslí, že atomy se nemohou přeměňovat, protože atomy jsou jedinečné, tj. elektrony, protony a neutrony různých atomů jsou rozdílné (jedinečné). Důvodem může být to, že je žákům při výuce vštěpováno, že rozdílné vlastnosti atomů souvisí s jejich rozdílnou stavbou. V našem výzkumu se v menší míře vyskytly i další miskoncepce, tj. že příčinou přeměny atomů je sluneční světlo nebo hřmění a blýskání.

V této úloze žáci také častěji, než tomu bylo u jiných úloh, doplňovali vlastní odpovědi. Ve většině případů se však jednalo o chybné odpovědi, ze kterých je zřejmé, že žáci nemají jasno v tom, co je charakteristické pro daný prvek (počet protonů v jádře) a jakým způsobem se může uskutečnit změna atomu jednoho prvku na atom jiného prvku. Pro zajímavost některé odpovědi uvádíme:

„Atomy se nemohou měnit za žádných okolností.“

„Můžou, ale je to otázkou milionů let. Vezměme si např. diamant. Dříve to byl obyčejný uhlík. Pak vlivem tlaku a tepla se postupně přeměnil.“

„Mohou se měnit, pokud odtrhneme nějaké neutrony, protony, nebo elektrony.“

„Mohou se změnit, pokud v obalu přibude nebo ubude elektron.“

„Atomy se mohou změnit, pokud se spojí s jinými atomy.“

„Tím že atom uvolní nebo přijme protony.“

ZÁVĚR

Úlohy z testu ve formě concept cartoons (včetně metodických poznámek) jsou volně ke stažení na http://physics.ujep.cz/~ehejnova/Pro_ucitele/index4.html. Věříme, že učitelům mohou účinně pomoci při odhalování chybných představ v oblasti atomistiky.

V našem příspěvku jsme ukázali na různá úskalí a problémy, na které mohou učitelé ve svém výkladu narazit. Myslíme si, že různé modely a analogie, které učitelé při výkladu pojmu atom běžně používají, jsou často velmi složité, a proto si žáci na jejich základě nevytvářejí zcela správné představy (o čemž ale učitelé někdy těžko získávají od žáků nějakou dobrou zpětnou vazbu). Ačkoliv se děti snaží po absolvování výkladu o atomech sladit své představy s těmi vědeckými, často to končí tím, že si vytvoří nějaký vlastní pokroucený, alternativní model, který lépe vyhovuje jejich předchozím zkušenostem s tím, jak okolní svět funguje.

Příčinu této skutečnosti lze hledat také v učebnicích, ve kterých jsou žákům předkládány dvourozměrné modely (zejména mladší žáci si pak myslí, že atomy

jsou ploché), které se navíc v různých učebnicích liší. Různost těchto modelů pak může v žácích vyvolat otázku: Který model je ten správný? Mnoho žáků také nemá ještě ani v 9. ročníku základní školy dostatečně rozvinutou formální úroveň myšlení a prostorovou představivost, aby dokázali do hloubky porozumět výukovým modelům a různým analogiím, které učitel používá, a také nedokáží odlišit, co model ukazuje správně a co ne. Proto je třeba při výkladu pojmu atom postupovat velmi obezřetně a s vědomím všech výše uvedených skutečností.

LITERATURA

- [1] DRIVER, R., SQUIRES, A., RUSHFORS, P., WOOD-ROBINSON, V.: *Making Sense of Secondary Science*. New York: Routledge Falmer, 2003.
- [2] STEPANS, J.: *Targeting Students' Science Miskonceptions*. Tampa: Showboard, 2003.
- [3] HARRISON, A. G., TREAGUST, D. F.: Secondary Students' Mental Models of Atoms and Molecules: Implications for Teaching Chemistry. *Science Education* 80(5), 509–534, 1996.
- [4] GRIFFITHS, A. K., PRESTON, K. P.: Grade-12 Students' Misconceptions Relating to Fundamental Characteristics of Atoms and Molecules. *Journal of Research in Science Teaching* 29(6), 611–628, 1992.
- [5] UNVER, A. O., ARABACIOGLU, S.: Helping Pre-service Science Teachers to understand Atomism Through Observations and Experiments. *Journal of Baltic Science Education* 14(1), 64–84, 2015.
- [6] DVOŘÁKOVÁ, I.: *Vědecké myšlení žáků – jak ho lze rozvíjet a testovat II.* [Online], Available: http://kdf.mff.cuni.cz/lide/dvorakova/Plzen_prispevek_Dvorakova.pdf (4 Jan 2017).
- [7] HEJNOVÁ, E.: Realizace konstruktivistického přístupu ve výuce fyziky prostřednictvím úloh zadaných formou diskuze. *Matematika – fyzika – informatika* 25(2), 102–115, 2016.
- [8] PALEČKOVÁ, J., TOMÁŠEK, V., STRAKOVÁ, J.: *Třetí mezinárodní výzkum matematického a přírodovědného vzdělávání (Výsledky žáků 7. a 8. ročníků – Přírodovědné předměty)*. Praha: ÚIV, 1997.
- [9] ALLEN, M.: *Misconceptions in Primary Science*. Berkshire: McGraw-Hill Education: Open University Press, 2014.
- [10] ROJKO, M.: *Fyzika 6 (Doplňující text pro experimentální třídy s rozšířeným vyučováním matematice)*. Praha: VÚP.

PROCHÁZKA ČASOPROSTOREM ANEB ÚVOD DO GEOMETRICKÝCH VLASTNOSTÍ SPECIÁLNÍ RELATIVITY

Jiří Králík

1 ČASOPROSTOROVÝ INTERVAL

Na teorii relativity je snad nejparadoxnější její název. Pravdou je, že při studiu této teorie se lze setkat s objekty, které jsou závislé na „úhlu pohledu“, tj. jsou relativní. Nicméně její hlavní a nosnou myšlenkou je naopak to, že při změně jedné (inerciální) pozorovací soustavy za jinou se chování světa (fyzika) nemění. Jedním z důsledků tohoto principu je, že mezní rychlost šíření jakéhokoli signálu je ve všech inerciálních systémech stejná. Tato *mezní rychlost* se tradičně nazývá rychlostí světla ve vakuu a označuje se jako c .¹

To, že je mezní rychlost stejná ve všech inerciálních systémech lze vyjádřit rovněž následujícím způsobem. Pokud dioda v okamžiku t_1 a v místě o souřadnicích $[x_1, y_1, z_1]$ v nějakém inerciálním vztažném systému vyšle signál mezní rychlostí c , který dorazí v okamžiku t_2 do místa o souřadnicích $[x_2, y_2, z_2]$, lze vztah mezi těmito údaji zapsat ve formě

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2,$$

resp. ve formě

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = 0.$$

Nezávislost mezní rychlosti c na volbě inerciálního vztažného systému znamená, že mají-li předchozí události (vyslání a příjem signálu) v jiném inerciálním systému souřadnice $[x'_1, y'_1, z'_1]$ a $[x'_2, y'_2, z'_2]$ v okamžicích označených t_1 a t_2 , budou spojeny výrazem

$$(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 - c^2(t'_2 - t'_1)^2 = 0.$$

¹Označování mezní rychlosti šíření signálů ve Vesmíru jako rychlosti světla má historické kořeny a je široce používané, ale ve skutečnosti není vhodné. Existence této rychlosti totiž nijak na světle nezávisí – světlo se šíří mezní rychlostí v podstatě náhodou. Kdyby měl foton velmi malou, ale nenulovou hmotnost, což není nerealné, rychlost šíření světla by byla o trochu menší než mezní rychlost a současné chápání fyziky by to nijak podstatně nenarušilo.

U událostí spojených mezní rychlostí se tedy veličina

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2 \quad (1)$$

nemění – má hodnotu nula ve všech inerciálních vztažných systémech.

Z principu relativity, existence mezní rychlosti a předpokladů o homogenitě času a prostoru a o izotropii prostoru plyne (viz např. oddíl 34 v [7]), že pro *jakékoli* dvě události, mezi kterými uběhla doba Δt a jejichž prostorová vzdálenost je $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, se hodnota veličiny

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2 \quad (2)$$

při změně inerciálního systému nemění. To znamená, že časové a prostorové intervaly mezi dvěma událostmi se sice v různých systémech mohu naměřit různé – $\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z$ v S a $\Delta t', \Delta x', \Delta y', \Delta z'$ v S' , ale tato jejich kombinace vychází v každé soustavě stejně. Invariantu (nikoli ovšem konstantě)

$$\Delta s \stackrel{\text{def}}{:=} \sqrt{c^2 \Delta t^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)} \quad (3)$$

se říká *časoprostorový interval*. Nicméně často se jako o časoprostorovém intervalu mluví i o jeho druhé mocnině $(\Delta s)^2$. Je tedy

$$\Delta s = \Delta s', \quad \text{resp.} \quad (\Delta s)_S = (\Delta s)_{S'}.$$

Na podobnosti tvaru časoprostorového intervalu a vzdálenosti bodů v eukleidovském prostoru, tj. $\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$, lze, jak si v následujícím ukážeme, vybudovat časoprostorovou analogii eukleidovské geometrie.

2 VEKTORY V EUKLEIDOVSKÉ GEOMETRII ANEB HRANÍ SI S ŠÍPKAMI

Geometrie vznikla z praktických důvodů jako nauka o prostorových vztazích mezi předměty. Z konkrétních objektů jako je kolík v zemi, provázek nebo vodní hladina vznikly abstrakcí geometrické objekty jako jsou body, přímky a roviny. Od dob Eukleida, který disciplínu axiomatizoval již ve třetím století před naším letopočtem, další velký pokrok nastal, když v ní René Descartes v 16. století začal systematicky uplatňovat metodu souřadnic.

Protože při popisu geometrických objektů je velmi výhodné pracovat s vektory a protože vektory jsou důležitou součástí matematického vybavení fyziků, v následujícím si v bodech, převážně heslovitě zavedeme vektory v (eukleidovském) prostoru a hned v dalším oddílu si v analogii vybudujeme i vektory v (einsteinovském) časoprostoru. Souřadnice nám přitom budou důležitým pomocníkem.

2.1 SOUŘADNICE BODŮ V PROSTORU A V ROVINĚ

Náš běžný, třírozměrný (3D) prostor si můžeme představovat jako soubor bodů. Každému bodu lze přiřadit tři reálná čísla, která jednoznačně určují jeho polohu vůči zadanému systému souřadnic.² Uspořádané trojice těchto čísel – souřadnic polohy bodů – se standardně značí $[x, y, z]$ nebo $[x_1, x_2, x_3]$. Pro různé souřadnicové systémy jsou souřadnice jednoho bodu obecně různá čísla. Systémem souřadnic budeme nadále bez upozornění rozumět *kartézský souřadnicový systém*, který má navzájem kolmé, přímé osy a na nich stejná škálování.³

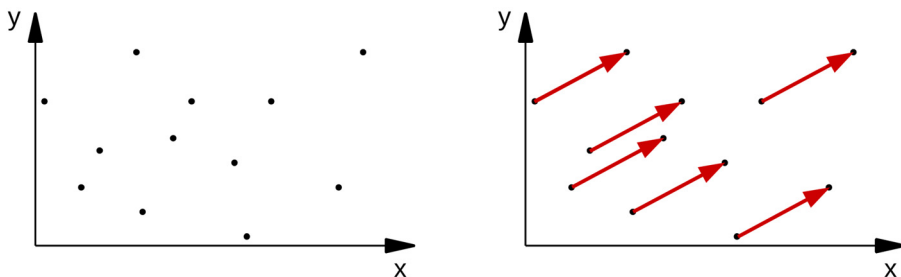
Pro studium vztahů v rovině (eukleidovský 2D prostor) stačí bodům, které tuto rovinu tvoří, přiřazovat vůči zadanému systému škálovaných os pouze dvě souřadnice – standardně značené $[x, y]$.

2.2 DVOJICE BODŮ, ŠÍPKA, VEKTOR

Každá dvojice bodů v prostoru definuje úsečku a každá *uspořádaná* dvojice bodů definuje šipku. Všem takovým šípkám lze přiřadit uspořádanou dvojici čísel ve 2D, resp. trojici čísel ve 3D prostoru, která bude popisovat jejich velikost a jejich orientaci vůči souřadnicovým osám. Míří-li například šipka z bodu A o souřadnicích $[x_A, y_A]$ do bodu B o souřadnicích $[x_B, y_B]$, budou souřadnice šipky $\overrightarrow{AB}$ dány uspořádanou dvojicí

$$(x_B - x_A, y_B - y_A) = (\Delta x, \Delta y),$$

tj. rozdíly odpovídajících si souřadnic bodů.⁴ Souřadnice šipek ovšem tyto šipky neurčují jednoznačně. Všechny šipky se stejnými rozdíly souřadnic svých koncových bodů mají stejné souřadnice (viz obr. 1). To nás přivádí k nápadu, že bychom všechny šipky se stejnou délkou (viz dále) a stejnou orientací vůči daným



Obr. 1: Různé dvojice bodů určují různé šipky, ale jen jeden vektor

²Přesněji jde o čísla s přiřazenou jednotkou délky, protože jde o vzdálenosti.

³Výklad omezuji pouze na kartézské systémy proto, že vztahy a úvahy v nich jsou zpravidla nejjednodušší (ne tak řešení konkrétních problémů).

⁴Všimněte si, že rozdíly souřadnic bodů jsou, jak je standardní, psány do kulatých závorek, nikoli do hranatých.

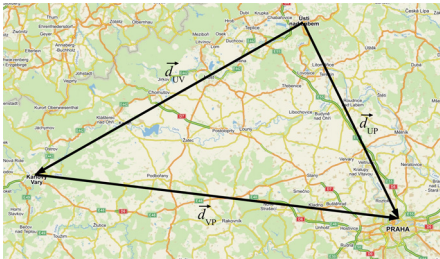
osám mohli považovat za jediný objekt. Tento objekt byl již před více než sto lety nazván *vektor*. O souřadnicích $(\Delta x, \Delta y)$ ve 2D, resp. $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ ve 3D pak budeme mluvit jako o souřadnicích vektoru.

2.3 SKLÁDÁNÍ VEKTORŮ

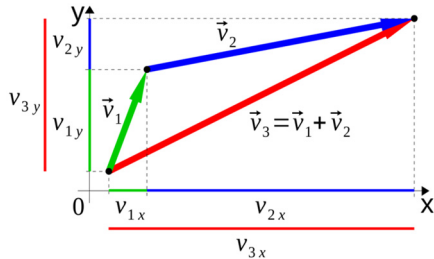
Představme si obrovskou, hladkou, bílou desku jako model eukleidovské roviny. Zatlučeme-li do takové desky tři hřebíky a spojíme-li je šipkami tak, jak je naznačeno na obrázcích 2 a 3, vidíme, že je vhodné zavést skládání dvou vektorů tak, že napojíme počátek druhého vektoru na konec prvního a výsledný vektor (jejich součet) získáme spojením počátku prvního a konce druhého z vektorů. Předpis pro souřadnice skládaných vektorů je pak

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_3 \Rightarrow (v_{1x}, v_{1y}) + (v_{2x}, v_{2y}) = (v_{3x}, v_{3y}).$$

Souřadnice vektorů tedy splňují standardní algebraický předpis pro sčítání uspořádané dvojice čísel.



Obr. 2: Výsledek posunutí z Ústí nad Labem do Karlových Varů a z Karlových Varů do Prahy je stejný, jako i jednoduché sčítání jejich souřadnic



Obr. 3: Sčítání šipek definované v souladu s vedlejším obrázkem odpovídá i jednoduché sčítání jejich souřadnic

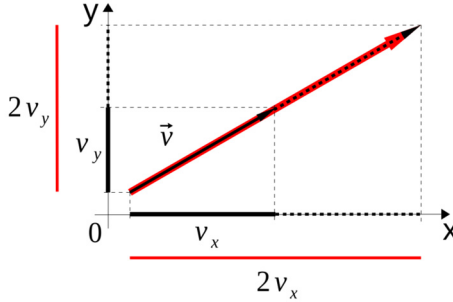
Prahy

Ve 3D prostoru pak v analogii zřejmě bude

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_3 &\Rightarrow (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}) + (v_{2x}, v_{2y}, v_{2z}) = \\ &= (v_{1x} + v_{2x}, v_{1y} + v_{2y}, v_{1z} + v_{2z}) = (v_{3x}, v_{3y}, v_{3z}). \end{aligned}$$

2.4 PRODLUŽOVÁNÍ A KRÁCENÍ VEKTORU

Jak se na šípce reprezentující vektor projeví, když každou souřadnici vynásobíme stejným reálným číslem, je patrné z obr. 4. Násobení souřadnic má za následek prodloužení či zkrácení vektoru při zachování jeho směru – délka jednotlivých šipek reprezentujících vektor se změní $|k|$ -krát, přitom je-li číslo k kladné, nezmění se orientace, pro k záporné bude orientace výsledného vektoru opačná než



Obr. 4: Vynásobení souřadnic šipky dvojkou znamená dvojnásobné prodloužení šipky ve stejném směru

u $\vec{v}$. Protože lze psát

$$(kv_x, kv_y) = k(v_x, v_y), \quad (4)$$

můžeme pro takto vzniklý vektor užít označení $k\vec{v}$.

Násobení vektorů veličinami, které mají netriviální fyzikální rozměr (jednotku) je důležitým krokem v rozšiřování vektorových představ i mimo jejich názorné zavedení spjaté s prostorovými šipkami. Tak například, pokud násobíte vektor posunutí $\Delta\vec{r}$ nějaké částice během časového intervalu Δt skalární veličinou $1/\Delta t$, získáte střední rychlost částice v tomto časovém intervalu:

$$\frac{1}{\Delta t} \Delta\vec{r} \equiv \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \equiv \langle \vec{v} \rangle_{\Delta t}.$$

2.5 LINEÁRNÍ KOMBINOVÁNÍ VEKTORŮ

Protože násobením vektorů číslem a sčítáním vektorů lze získat jiné vektory, lze kombinováním těchto operací získávat mnoho vektorů dalších. O vektoru $\vec{w}$, který lze vyjádřit ve tvaru

$$\vec{w} = \kappa_1 \vec{w}_1 + \kappa_2 \vec{w}_2, \quad (5)$$

kde κ_1 a κ_2 jsou nějaká reálná čísla, resp. veličiny, mluvíme jako o *lineární kombinaci* vektorů $\vec{w}_1$ a $\vec{w}_2$.

Například rozdíl dvou vektorů rychlosti částice

$$\Delta\vec{v} \equiv \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

lze zapsat jako lineární kombinaci s koeficienty $\kappa_1 = -1$ a $\kappa_2 = +1$. Pokud ovšem za koeficienty vezmeme

$$\kappa_1 = -\frac{1}{\Delta t} \quad \text{a} \quad \kappa_2 = \frac{1}{\Delta t},$$

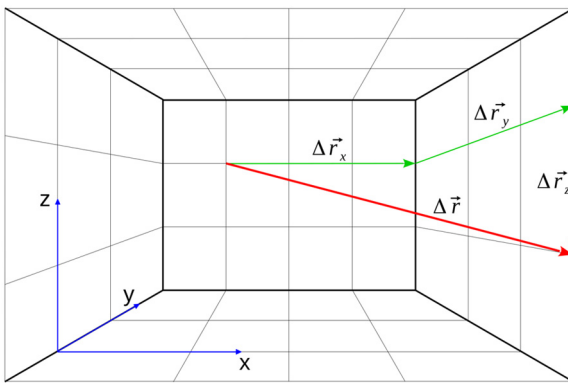
kde Δt je časový interval, který uběhne při změně rychlosti částice z $\vec{v}_1$ na $\vec{v}_2$, získáme

$$-\frac{1}{\Delta t}\vec{v}_1 + \frac{1}{\Delta t}\vec{v}_2 = \frac{1}{\Delta t}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \equiv \frac{1}{\Delta t}\Delta\vec{v} \equiv \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t},$$

tj. střední zrychlení. Vidíme tak, že nebudou-li násobící koeficienty pouze bezrozměrná reálná čísla, ale obecně nějaké skalární (na souřadnicovém systému nezávislé) fyzikální veličiny, vyvede nás to ven z prostoru názorných, šipkoidních vektorů souvisejících přímo s polohami bodů v prostoru. Získáme tak novou, poněkud abstraktnější vektorovou veličinu, která má jiný fyzikální rozměr než měly původní vektory posunutí (uváděné s nějakou jednotkou délky, například metrem). Operací násobení vektorů skalárem tak lze z čistě geometrických vektorů posunutí vyrábět na intuici náročnější vektory. Důležité ovšem je, že u všech takovýchto „náročnějších“ vektorů lze vždy vystopovat jejich původ až k vektorům posunutí, takže všechny ukazují do směrů, které se shodují se směry v našem běžném životním prostoru. Samosebou se má za to, že sčítat, resp. lineárně kombinovat můžeme pouze vektory se stejným fyzikálním rozměrem.

Je zajímavé, že *všechny* vektory v rovině můžeme získat lineárním kombinováním libovolných *dvou* vektorů této roviny, které nemají stejný směr, tj. jejichž odpovídající šipky nelze složit na přímku. Zároveň všechny vektory v prostoru lze vyjádřit jako lineární kombinaci tří vektorů, jejichž odpovídající šipky nelze složit do jedné roviny.

Představme si, že vybavíme oblast zájmu, imaginární prostorovou, krychlovou mříží (viz například místnost na obr. 5). Dále si vybereme bod, ze kterého necháme do směrů „drátů“ mříže vycházet osy s libovolně zvolenou orientací (standardní je pravotočivá). Nyní můžeme jakýkoli vektor posunutí $\Delta\vec{r}$ vyjádřit



Obr. 5: Zavedeme-li do zkoumaného prostoru krychlovou mříž s osami x , y a z , lze každý vektor v tomto prostoru vyjádřit jako lineární kombinaci tří vektorů, z nichž každý míří výhradně podél jedné z os

jako součet navzájem kolmých vektorů, které míří ve směrech jednotlivých os:

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_x + \Delta\vec{r}_y + \Delta\vec{r}_z.$$

Pokud jednotkou vzdálenosti na mříži na obr. 5 je jeden metr, pak $\Delta\vec{r}_x$ označuje posunutí *podél* osy x o 3 metry (+3 m), $\Delta\vec{r}_y$ posunutí *proti* ose y o 3 metry (−3 m) a $\Delta\vec{r}_z$ posunutí *proti* ose z o 1 metr (−1 m). O vektorech $\Delta\vec{r}_x$, $\Delta\vec{r}_y$ a $\Delta\vec{r}_z$ mluvíme jako o *složkách vektoru* $\Delta\vec{r}$ v dané mříži či v daném systému souřadnic. O uspořádané trojici čísel (+3, −3; −1) m pak jako o *souřadnicích vektoru* $\Delta\vec{r}$.

2.6 VYJÁDRĚNÍ VEKTORŮ V DANÉ BÁZI

Z lineární algebry je známo, že všechny uspořádané trojice reálných čísel (a, b, c) lze získat kombinováním tří tzv. *bázových trojic* $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ a $(0, 0, 1)$. Pro všechna reálná čísla a, b a c lze totiž zapsat

$$(a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1).$$

Tuto myšlenku lze použít i u vektorů. Najdemeli v dané souřadnicové mříži tři vektory se souřadnicemi $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ a $(0, 0, 1)$, můžeme z nich každý jiný vektor lineárně nakombinovat. Snad je (např. opět z obr. 5) patrné, že takovými vektory jsou vektory s délkou rovnou délce jednotky mříže (např. 1 m) a mířící ve směrech jednotlivých os. Označíme-li tyto vektory – nazýváme je *jednotkové* – po řadě $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ a $\vec{u}_z$, lze vektor o souřadnicích (a, b, c) v této mříži získat z lineární kombinace

$$\vec{v} = a\vec{u}_x + b\vec{u}_y + c\vec{u}_z.$$

Trojice nezávislých vektorů, které jsou schopné díky lineárnímu kombinování vygenerovat všechny vektory v prostoru, nazýváme *báze* tohoto prostoru.⁵ Pokud jsou vektory v bázi jednotkové a navíc navzájem kolmé, mluvíme o *ortonormální bázi*.

Úvahy zcela analogické samozřejmě fungují i v rovině – i zde může být velmi užitečné uvažovat o dvou kolmých jednotkových vektorech a generovat ostatní vektory v rovině s jejich pomocí. Označíme-li je $\vec{u}_x$ a $\vec{u}_y$, lze pro každý vektor roviny $\vec{v}$ jednoznačně nalézt čísla v_x a v_y tak, že platí

$$\vec{v} = v_x\vec{u}_x + v_y\vec{u}_y.$$

O uspořádané dvojici čísel (v_x, v_y) pak mluvíme jako o *souřadnicích vektoru* $\vec{v}$ vůči bázi $\mathbf{b} = (\vec{u}_x, \vec{u}_y)$. Samozřejmě pro jinou bázi – $\mathbf{b}' = (\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'})$ – jsou souřadnice stejného vektoru $\vec{v}$ obecně jiné:

$$\vec{v} = v_{x'}\vec{u}_{x'} + v_{y'}\vec{u}_{y'},$$

⁵Vektory v dané skupině vektorů považujeme za nezávislé, pokud žádný člen skupiny nemůže být vyjádřen jako lineární kombinace ostatních členů.

Často je důležité umět nalézt mezi souřadnicemi v různých bázích, tj. $(v_x, v_y)_{\mathbf{b}}$ a $(v_{x'}, v_{y'})_{\mathbf{b}'}$, nějaký vztah. Že nějaký existovat musí plyne z toho, že je

$$v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y = \vec{v} = v_{x'} \vec{u}_{x'} + v_{y'} \vec{u}_{y'}. \quad (6)$$

Tyto rovnosti vlastně vyjadřují, že vektor považujeme za geometrický objekt, tj. objekt principiálně nezávislý na volbě konkrétní báze.

2.7 VZDÁLENOST DVOU BODŮ, VELIKOST VEKTORŮ

Představme si obrovskou, hladkou, bílou desku jako model eukleidovského 2D prostoru (roviny). Dále si představme, že do této desky zatlučeme dva hřebíky A a B. Označíme-li souřadnice polohy hřebíků vůči nějakému systému jako výše, tj. $[x_A, y_A]$ a $[x_B, y_B]$, bude jejich vzdálenost podél směru osy x dána rozdílem (sledujte obrázek 6 vlevo)

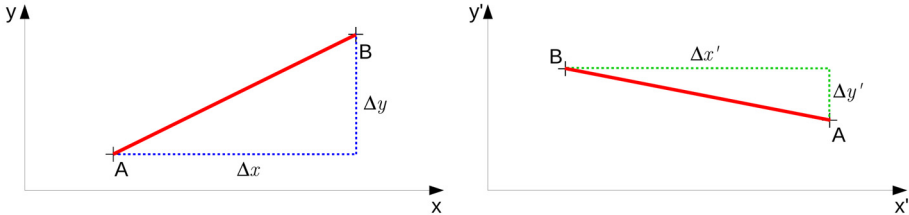
$$|x_B - x_A| = |x_A - x_B| = |\Delta x| = \sqrt{(\Delta x)^2}.$$

Analogicky podél směru osy y bude vzdálenost hřebíků/bodů dána

$$|y_B - y_A| = |y_A - y_B| = |\Delta y| = \sqrt{(\Delta y)^2}.$$

Z obrázku 6 vlevo je rovněž patrné, že napneme-li mezi hřebíky provázek, lze jeho délku spočítat z rozdílů souřadnic hřebíků s pomocí Pythagorovy věty⁶:

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}. \quad (7)$$



Obr. 6: Dva body v rovině mohou mít vzhledem k různým soustavám různé souřadnice

Délku napnutého provázku považujeme za vzdálenost hřebíků, a to nás přivádí k definici nejen vzdálenosti bodů v prostoru, ale i velikosti šipek, resp. vektorů, které tyto body určují. Označíme-li ve 3D prostoru se zavedeným souřadnicovým systémem S souřadnice vektoru $\vec{v}$ jako $(v_x, v_y, v_z)_S$, bude délka nebo též *velikost* tohoto vektoru

$$\|\vec{v}\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (8)$$

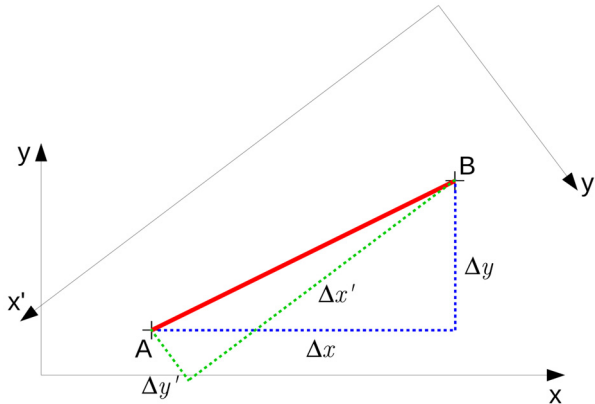
⁶Pythagorova věta je jednou z nejhlubších vět eukleidovské geometrie, je v podstatě ekvivalentní 5. Eukleidovu axiomu.

Pokud pozveme dva pozorovatele, aby si nezávisle a libovolně zavedli na oné bílé desce své kartézské systémy⁷ (S a S') a situaci proměřili, můžeme z jejich údajů získat náčrtky např. jako na obr. 6. Snad je z náhledu patrné, že jediné, co má v této souvislosti geometrický (či, chcete-li, bezsouřadnicový) význam, je vzdálenost hřebíků. Vše ostatní (např. poloha, úhly či orientace) závisí na specifické volbě souřadnicových systémů. Konzistence údajů obou pozorovatelů tak vyžaduje platnost

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2}. \quad (9)$$

Tato úvaha nás přivádí k závěru, že stejně jako vzdálenosti bodů nezávisí na volbě souřadnic těchto bodů, tak se nemění ani velikosti vektorů při přechodu z jednoho souřadnicového systému do druhého. Pro velikost jednoho vektoru $\vec{v}$ popsaného v S souřadnicemi $(v_x, v_y, v_z)_S$ a v S' souřadnicemi $(v'_x, v'_y, v'_z)_{S'}$ tak požadujeme platnost

$$\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(v'_x)^2 + (v'_y)^2 + (v'_z)^2}, \quad \text{tj.} \quad \|\vec{v}\|_S = \|\vec{v}\|_{S'}. \quad (10)$$



Obr. 7: Při troše snahy lze z naměřených údajů vydedukovat, že vzájemná poloha čárkované a nečárkované soustavy souřadnic z obr. 6 musí vypadat takto

2.8 SKALÁRNÍ SOUČIN VEKTORŮ

Jako extrémně užitečný nástroj na extrahování informací o vektorech a jejich souřadnicích se ukazuje procedura, která dvěma vektorům přiřazuje číslo (skalár) tak, že

⁷Abychom mohli mluvit o kartézských systémech souřadnic vektorů, měli bychom mít nejprve definovány velikosti vektorů a úhly mezi vektory. Na tomto místě se ale do toho v rámci plynulosti výkladu nebudeme pouštět a, s trochou studu v srdci, vás odkážu na intuici. Věci by se měly poněkud projasnit po zavedení skalárního součinu.

a) je lineární (chceme, aby fungovala standardní pravidla sčítání a roznásobování mezi čísly a vektory);

b) dvěma stejným vektorům přiřazuje druhou mocninu jejich velikosti.

Takováto procedura – dva vektory dohromady poskytují reálné číslo – se obvykle ve škole značí výrazem $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = c$ (kde $c \in \mathbb{R}$) a nazývá se *skalární součin*. Výše uvedené podmínky lze pak zapsat takto:

$$\text{a) } \vec{w} \cdot (a \vec{v}_1 + b \vec{v}_2) = a \vec{w} \cdot \vec{v}_1 + b \vec{w} \cdot \vec{v}_2;$$

$$\text{b) } \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2 \equiv v^2.$$

Navíc se u eukleidovských vektorů předpokládá, že jejich skalární součin je komutativní, tj. že $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1$.

Z analytické geometrie je známo, že geometrický (na souřadnicích nezávislý) význam skalárního součinu je $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\| \cos \alpha$, kde α je úhel, který vektory svírají. Protože ale geometrie časoprostoru, ke které míříme, není v některých ohledech tak názorná jako geometrie eukleidovská, ukážeme si na tomto místě souřadnicový postup nalezení výsledku skalárního násobení dvou vektorů. Výhodou tohoto postupu je, že je snadno přenositelný i do speciální relativity.

V následujícím se pro jednoduchost budeme pohybovat pouze po 2D eukleidovském prostoru, tj. v rovině. Z oddílů 2.6 a 2.7 již víme, že velikost vektoru $\vec{v}$ lze z jeho souřadnic v kartézské souřadnicové bázi $\mathbf{b} = (\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ vypočítat s pomocí formule

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

a také víme, že je toto číslo na souřadnicích nezávislé. To ovšem znamená, že i skalární součin vektoru se sebou samým, tj.

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2 \equiv v^2 = v_x^2 + v_y^2, \quad (11)$$

je veličina nezávislá na změně báze. Pro každý vektor $\vec{v}$ tedy musí být

$$v_x^2 + v_y^2 = v_{x'}^2 + v_{y'}^2, \quad (12)$$

kde zřejmě $(v_{x'}, v_{y'})$ jsou souřadnice vektoru $\vec{v}$ v nějaké jiné bázi $\mathbf{b}' = (\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'})$.⁸

Pokud je ale skalární součin dvou stejných vektorů nezávislý na volbě souřadnicové báze, musí být na změně báze nezávislý i skalární součin dvou různých vektorů. Je-li totiž $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, bude

$$\vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}). \quad (13)$$

⁸Mimochodem, rovnost 12 bychom mohli zapsat také jako $(\vec{v} \cdot \vec{v})_{\mathbf{b}} = (\vec{v} \cdot \vec{v})_{\mathbf{b}'}$.

Protože levá strana této rovnice dle výše uvedeného je invariantní vůči změně báze, musí být i pravá. Ale pravou lze díky lineárním vlastnostem skalárního součinu (a jeho komutativnosti) rozepsat na

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b}, \quad \text{takže} \quad c^2 = a^2 + b^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}. \quad (14)$$

Protože jak $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$, tak $\vec{b} \cdot \vec{b} = b^2$ na volbě báze nezávisí, nemůže na ní záviset ani $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Skalární součin je tedy operace, jejíž výsledek je invariantní vůči změně souřadnicové báze, tj.

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})_{\mathbf{b}} = (\vec{a} \cdot \vec{b})_{\mathbf{b}'}$$

Nyní se podívejme na to, jak lze ze znalosti souřadnic vektorů v nějaké bázi vypočítat i jejich skalární součin. Vezmeme-li opět $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, tj. $(c_x, c_y) = (a_x + b_x, a_y + b_y)$, musí být

$$\vec{c} \cdot \vec{c} = c_x^2 + c_y^2$$

a ovšem také

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2.$$

Po roznásobení a přerovnání na

$$(a_x^2 + a_y^2) + (b_x^2 + b_y^2) + 2(a_x b_x + a_y b_y)$$

lze po srovnání s výrazem 14 vidět, že skalárnímu součinu dvou různých vektorů odpovídá v souřadnicích výraz

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y. \quad (15)$$

Vzhledem k nezávislosti skalárního součinu na volbě báze, musí být

$$a_x b_x + a_y b_y = a_{x'} b_{x'} + a_{y'} b_{y'}. \quad (16)$$

Ve 3D eukleidovském prostoru bychom zcela analogickým postupem pro vyjádření skalárního součinu dvou vektorů s pomocí souřadnic získali výraz

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \quad (17)$$

také samozřejmě nezávislý na volbě báze.

2.9 SKALÁRNÍ SOUČIN A EXTRAKCE SOUŘADNIC

Jednotkové vektory $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ mířící ve směrech jednotlivých os kartézské 3D mříže mají v bázi $\mathbf{b}$, kterou samy tvoří, souřadnice

$$(\vec{u}_x)_{\mathbf{b}} = (1, 0, 0), \quad (\vec{u}_y)_{\mathbf{b}} = (0, 1, 0), \quad (\vec{u}_z)_{\mathbf{b}} = (0, 0, 1).$$

Skalární součiny mezi jednotlivými prvky báze lze vyjádřit ve formě tabulky:

$\cdot$	$\vec{u}_x$	$\vec{u}_y$	$\vec{u}_z$
$\vec{u}_x$	1	0	0
$\vec{u}_y$	0	1	0
$\vec{u}_z$	0	0	1

Jednotlivé položky v této tabulce můžeme přitom získat aplikací výše uvedeného vyjádření skalárního součinu s pomocí souřadnic 17.

Souřadnice nějakého vektoru v dané bázi souvisí s jednotkovými vektory následujícím způsobem (pro skalární součiny jednotkových vektorů sledujte tabulku):

$$\begin{aligned}\vec{v} &= v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y + v_z \vec{u}_z & / \cdot \vec{u}_x, \\ \vec{v} \cdot \vec{u}_x &= v_x \vec{u}_x \cdot \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y \cdot \vec{u}_x + v_z \vec{u}_z \cdot \vec{u}_x, \\ \vec{v} \cdot \vec{u}_x &= v_x.\end{aligned}$$

Uvedená procedura díky symetrii úvah samozřejmě platí i pro další souřadnice. Obecně lze souřadnice vektoru $\vec{v}$ v bázi dané uspořádanou trojicí jednotkových vektorů $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ získat takto:

$$(\vec{v})_{\mathbf{b}} = (v_x, v_y, v_z) = (\vec{v} \cdot \vec{u}_x, \vec{v} \cdot \vec{u}_y, \vec{v} \cdot \vec{u}_z) = \vec{v} \cdot (\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z).$$

2.10 SKALÁRNÍ SOUČIN A JINÁ BÁZE

Skalární součin také umožňuje elegantní nalezení transformačních rovnic pro převod souřadnic vektorů z jedné báze do druhé. Nejprve se podívejme na převodní vztahy mezi samotnými bázemi.

Uvedli jsme si, že v nějaké bázi $\mathbf{b} = (\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ lze vyjádřit *každý* vektor roviny, tedy i vektory jiné báze $\mathbf{b}' = (\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'})$. Můžeme tak psát

$$\begin{aligned}\vec{u}_{x'} &= a_{xx} \vec{u}_x + a_{xy} \vec{u}_y, \\ \vec{u}_{y'} &= a_{yx} \vec{u}_x + a_{yy} \vec{u}_y,\end{aligned}\tag{18}$$

kde čísla a_{xx}, a_{xy}, a_{yx} a a_{yy} tvoří souřadnice vektorů báze $\mathbf{b}'$ v bázi $\mathbf{b}$. Informace o těchto koeficientech opět vyextrahujeme s pomocí skalárního násobení jako v předchozím bodě. Z násobení obou rovnic vektorem $\vec{u}_x$, tj.

$$\begin{aligned}\vec{u}_{x'} &= a_{xx} \vec{u}_x + a_{xy} \vec{u}_y & / \cdot \vec{u}_x, \\ \vec{u}_{y'} &= a_{yx} \vec{u}_x + a_{yy} \vec{u}_y & / \cdot \vec{u}_x,\end{aligned}$$

získáme

$$a_{xx} = \vec{u}_{x'} \cdot \vec{u}_x \quad \text{a} \quad a_{yx} = \vec{u}_{y'} \cdot \vec{u}_x.$$

A zcela analogicky násobením obou rovnic vektorem $\vec{u}_y$ plyne

$$a_{xy} = \vec{u}_{x'} \cdot \vec{u}_y \quad \text{a} \quad a_{yy} = \vec{u}_{y'} \cdot \vec{u}_y.^9$$

⁹Takže například platí $(\vec{u}_{x'})_{\mathbf{b}} = (a_{xx}, a_{xy})$.

Dosažené můžeme přehledně zobrazit do tabulky:

$$\begin{array}{c|cc} \cdot & \vec{u}_x & \vec{u}_y \\ \hline \vec{u}_{x'} & a_{xx} & a_{xy} \\ \vec{u}_{y'} & a_{yx} & a_{yy} \end{array}$$

Znalost koeficientů a_{xx}, a_{xy}, a_{yx} a a_{yy} zcela postačuje k opačnému odvození souřadnic vektorů báze $\mathbf{b}$ v bázi $\mathbf{b}'$, takže není zapotřebí nových informací. Pokud bychom totiž místo výrazů 18 zapsali obráceně

$$\begin{aligned} \vec{u}_x &= b_{xx}\vec{u}_{x'} + b_{xy}\vec{u}_{y'}, \\ \vec{u}_y &= b_{yx}\vec{u}_{x'} + b_{yy}\vec{u}_{y'}, \end{aligned} \quad (19)$$

lze násobením těchto rovnic postupně vektory $\vec{u}_{x'}$ a $\vec{u}_{y'}$ zjistit, že koeficienty b_{xx}, b_{xy}, b_{yx} a b_{yy} souvisí s koeficienty a_{xx}, a_{xy}, a_{yx} a a_{yy} vztahem

$$\begin{pmatrix} b_{xx} & b_{xy} \\ b_{yx} & b_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{yx} \\ a_{xy} & a_{yy} \end{pmatrix}.$$

Rovnice 19 lze tedy přepsat na

$$\begin{aligned} \vec{u}_x &= a_{xx}\vec{u}_{x'} + a_{yx}\vec{u}_{y'}, \\ \vec{u}_y &= a_{xy}\vec{u}_{x'} + a_{yy}\vec{u}_{y'}. \end{aligned} \quad (20)$$

2.11 SKALÁRNÍ SOUČIN A TRANSFORMAČNÍ ROVNICE

Nyní si ukážeme, že znalost koeficientů a_{xx}, a_{xy}, a_{yx} a a_{yy} – souřadnic vektorů jedné kartézské báze v druhé – je dostatečná i pro převod souřadnic jakéhokoli vektoru $\vec{v}$ v bázi $\mathbf{b}$ na jeho souřadnice v bázi $\mathbf{b}'$.

Označíme-li souřadnice $\vec{v}$ v bázi $\mathbf{b}$ jako (v_x, v_y) a jako $(v_{x'}, v_{y'})$ souřadnice $\vec{v}$ v bázi $\mathbf{b}'$, lze psát (viz rovnice 6):

$$v_x\vec{u}_x + v_y\vec{u}_y = \vec{v} = v_{x'}\vec{u}_{x'} + v_{y'}\vec{u}_{y'}. \quad (21)$$

Díky 20 ale musí rovněž platit

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_x(a_{xx}\vec{u}_{x'} + a_{yx}\vec{u}_{y'}) + v_y(a_{xy}\vec{u}_{x'} + a_{yy}\vec{u}_{y'}) = \\ &= (v_x a_{xx} + v_y a_{xy})\vec{u}_{x'} + (v_x a_{yx} + v_y a_{yy})\vec{u}_{y'}. \end{aligned}$$

Srovnáme-li toto vyjádření s vyjádřením 21, získáme mezi souřadnicemi vektoru $\vec{v}$ v obou bázích převodní vztahy

$$\begin{aligned} v_{x'} &= a_{xx}v_x + a_{xy}v_y, \\ v_{y'} &= a_{yx}v_x + a_{yy}v_y. \end{aligned} \quad (22)$$

Jen malou obměnou výše uvedeného postupu (a nebo prostým převyjádřením) lze získat i opačné převodní vztahy:

$$\begin{aligned}v_x &= a_{xx}v_{x'} + a_{yx}v_{y'}, \\v_y &= a_{xy}v_{x'} + a_{yy}v_{y'}.\end{aligned}\tag{23}$$

Suma sumárum, jednoznačným zadáním vztahu jednotkových vektorů různých bází, tj. zadáním matice koeficientů a_{mn} , jsou určeny transformační vztahy i mezi souřadnicemi vektorů v těchto bázích.

Celé uvedené schéma funguje v naprosté analogii v třírozměrném eukleidovském prostoru.¹⁰ Při hledání vyjádření souřadnic nějakého vektoru $\vec{v}$ v bázi $\mathbf{b}' = (\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'})$ do souřadnic toho samého vektoru v bázi $\mathbf{b} = (\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ bychom nakonec přišli k rovnicím

$$\begin{aligned}v_{x'} &= a_{xx}v_x + a_{xy}v_y + a_{xz}v_z, \\v_{y'} &= a_{yx}v_x + a_{yy}v_y + a_{yz}v_z, \\v_{z'} &= a_{zx}v_x + a_{zy}v_y + a_{zz}v_z.\end{aligned}\tag{24}$$

Konkrétním příkladem takových transformačních rovnic jsou rovnice

$$\begin{aligned}v_{x'} &= v_x \cos \alpha + v_y \sin \alpha, \\v_{y'} &= -v_x \sin \alpha + v_y \cos \alpha, \\v_{z'} &= v_z,\end{aligned}$$

které převádějí souřadnice vektoru $\vec{v}$ vyjádřené v jednom systému souřadnic (jedné bázi) na souřadnice stejného vektoru vyjádřené v systému souřadnic, který je vůči prvnímu systému pootočený o úhel α kolem osy z (pootočená báze) – viz obr. 8.

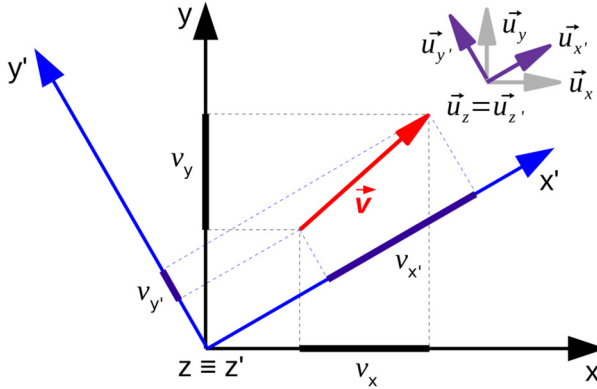
Nyní jsme připraveni na pochopení einsteinovské relativity ne jako teorie o rychle se pohybujících vlcích a měnících se hmotnostech, ale jako geometrie časoprostoru.

3 VEKTORY V ČASOPROSTOROVÉ GEOMETRII

Než se vrhneme na studium geometrie čtyřrozměrného časoprostoru, pro zmírnění obav se podívejte na Einsteinův výrok:¹¹

¹⁰V podstatě stejným postupem lze konzistentně vybudovat i geometrii v $n \geq 4$ -rozměrných zobecněných těchto eukleidovských prostorů. Dokonce lze uvažovat i neeukleidovské (tzv. zakřivené) prostory, kde ono „schéma“ funguje ne o moc jinak. Zakřivení se projeví například tak, že už se nelze spolehnout na Pythagorovu větu. Takové prostory nejsou jen nějakou hříčkou superabstraktně myslících matematiků, jak by se mohlo zdát, ale tvoří důležitou součást všech moderních popisů gravitace (v čele s Einsteinovou obecnou teorií relativity).

¹¹Viz [1], str. 121 – všem zájemcům o teorii relativity doporučuji tuto knihu z pera samotného tvůrce alespoň prolistovat.



Obr. 8: Pootočené souřadnicové osy a příslušné souřadnice vektoru $\vec{v}$

Mystická hrůza uchvátí nematematika, když slyší o „čtyřdimensním“, pocit ne nepodobný onomu vyvolanému strašidlem na jevišti. A přece není žádný výrok banálnější než ten, že tento náš svět jest čtyřdimensní časoprostorové kontinuum.

V souladu s citátem mistra bychom měli považovat za zřejmé, že se všechny děje ve vesmíru odehrávají v čase a v prostoru. Zvolíme-li si nějakou inerciální vztahnou soustavu, můžeme každé drobné události přiřadit jednu časovou souřadnici a tři souřadnice polohy. Mluvíme pak o souřadnicích *bodu v časoprostoru* vzhledem k danému inerciálnímu vztahnému systému a zapisujeme v analogii s 3D prostorem jako uspořádanou čtveřici $[t, x, y, z]$.

Díky výskytu mezní rychlosti v důležitých výrazech jako je časoprostorový interval a Lorenzovy převáděcí rovnice se často místo samostatného časového údaje t bere jako první souřadnice časoprostorového bodu kombinace ct . Tím se jednak sjednocuje popis časoprostoru z hlediska jednotek měření časových a prostorových intervalů (obojí vychází například v metrech) a jednak je symetričtější i škálování os časoprostorových grafů. V takových grafech je světočára částice pohybující se mezní rychlostí skloněna vůči všem osám o 45° , přitom tato vlastnost je pak nezávislá na volbě jednotek.¹²

¹²Z hlediska invariance časoprostorových intervalů je udávání časového údaje v jiných jednotkách než udávání prostorových údajů naprosto nepřírozené. Představte si například, že měříme vzdálenosti na povrchu Země v metrech a výšku nad povrchem ve stopách. V jakých jednotkách bychom pak získali vzdálenost dvou bodů, kdybychom použili standardní $\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$? Dokonce kdybychom své souřadnice pootočili, získali bychom pro vzdálenost jiný údaj! Ve vyšší fyzice se nejčastěji volí jednotky tak, aby $c = 1$. Tím se zápisy vztahů významně zjednodušují.

V této souvislosti se často prohlašuje, že čas je v teorii relativity ekvivalentní prostorovým souřadnicím, a to vyvolává pocit, že časová a prostorové souřadnice jsou v principu zaměnitelné. Že to nemůže být pravda je vidět už z výrazu pro časoprostorový interval (viz definice 3) – i když osy označíme podobně:

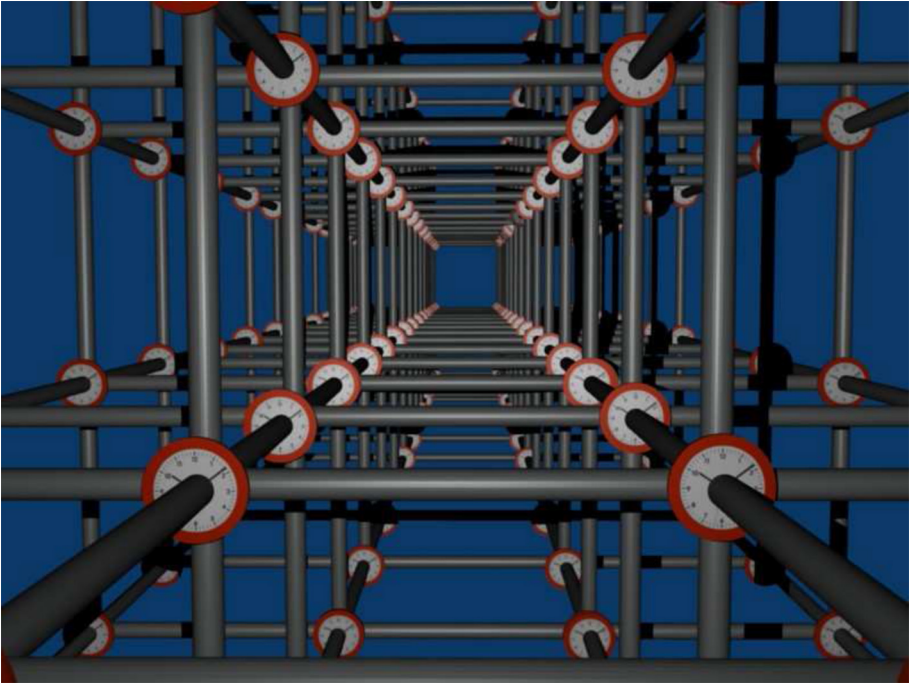
$$ct \equiv x_0, \quad x \equiv x_1, \quad y \equiv x_2, \quad z \equiv x_3,$$

bude

$$\Delta s^2 = \Delta x_0^2 - (\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2).$$

Různost znamének mezi časovým a prostorovými údaji má velký význam, který souvisí s tím, že na rozdíl od prostorových souřadnic, po ose t nemůžeme jít dozadu.

V následujícím si vybudujeme představu tzv. časoprostorových vektorů v přímé analogii s předchozími body budování eukleidovských vektorů.



Obr. 9: K přiřazování souřadnic v časoprostorové mříži (inspirováno obr. v [15] na str. 37). Hodiny musí být nějakým způsobem synchronizovány (což může být netriviální)

3.1 SOUŘADNICE BODŮ V ČASOPROSTORU

Podobně jako si můžeme eukleidovskou rovinu představit „složenou“ z bodů, lze si i časoprostor představit složený ze souboru událostí, resp. časoprostorových bodů či též světobodů).¹³ Souřadnice $[ct, x, y, z]$ těchto světobodů v 1+3D časoprostoru (1 za časovou dimenzi, 3 za prostorové) *vždy* určujeme vzhledem k nějakému vztažnému systému, kde je „vztyčena časoprostorová mříž“, tj. kde každé krátkotrvající lokální události (například bliknutí LED-diody) můžeme jednoznačně přiřadit časovou a prostorové souřadnice (srovnejte s obr. 5). V rámci *speciální* teorie relativity uvažujeme vždy *inerciální vztažné systémy*. Vůči různým inerciálním vztažným systémům jsou souřadnice světobodů obecně různá čísla (s jednotkami vzdálenosti).

Pokud se zajímáme pouze o pohyby částic po přímce, k zadání souřadnic každé události v příslušném 1+1D časoprostoru nám stačí pouze dvě čísla – standardně $[ct, x]$.

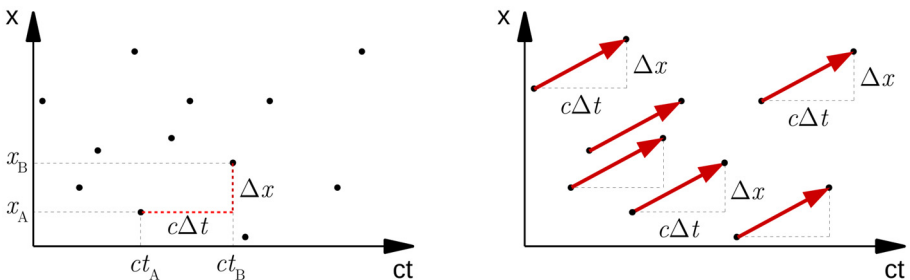
3.2 SVĚTOŠIPKA, SVĚTOVEKTOR

Každá uspořádaná dvojice světobodů definuje časoprostorovou šipku, resp. světošipku (viz obr. 10 vlevo), přitom souřadnice této šipky jsou dány rozdílem souřadnic daných světobodů. Má-li první událost v 1+1D časoprostoru souřadnice $[ct_A, x_A]$ a druhá událost souřadnice $[ct_B, x_B]$, budou souřadnice takové světošipky dány uspořádanou dvojicí

$$(ct_B - ct_A, x_B - x_A) = (c\Delta t, \Delta x).$$

V 1+3D časoprostoru by pak analogicky souřadnice světošipky byly dány rozdíly

$$(c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z).$$



Obr. 10: Mnoha různým časoprostorovým šípkám nataženým mezi různými dvojicemi světobodů přísluší stejné rozdíly jejich časoprostorových souřadnic

¹³Z logického hlediska je lepší takováto omezená místa v časoprostoru spíše nazývat „světobody“ než „události“, protože v časoprostoru samozřejmě existuje daleko více míst, ve kterých se nic neděje. Na druhou stranu je nutné slovu „událost“ přiznat krátkost a větší přitažlivost. :-)

Je zřejmé, že rozdíly souřadnic nefixují světošipky jednoznačně (viz obr. 10 vpravo) – v analogii s eukleidovským prostorem tak přicházíme k pojmu *časoprostorového vektoru* jako množiny všech časoprostorových šipek, jejichž rozdíly souřadnic koncových světobodů mají stejné hodnoty.

V literatuře se nejčastěji tento typ vektoru nazývá čtyřvektor (4-vektor), ale to není moc vhodné, protože to navozuje představu přímého zobecnění eukleidovských vektorů do čtyřrozměrného prostoru (jeho kartézská báze bude obsahovat čtyři navzájem kolmé jednotkové vektory). Jenže časoprostorové vektory nemají všechny vlastnosti eukleidovských čtyřdimenzionálních vektorů. Dle mého názoru je lepším krátkým ekvivalentem pojmu časoprostorový vektor výraz *světovektor*, který budu nadále používat jako jeho synonymum.

Časoprostorové vektory v tomto textu poznáme díky symbolu $\mapsto$ nad označením příslušné veličiny, takže například časoprostorové posunutí bude označovat výraz $\Delta \vec{r}$ a časoprostorovou rychlost výraz $\vec{v}$ (viz dále).¹⁴ Souřadnice nějakého časoprostorového vektoru (nejen světošipky) $\vec{w}$ budeme značit obecně (w_t, w_x, w_y, w_z) , přitom první souřadnice se obvykle nazývá časová a zbylým se říká *prostorové*.

3.3 SKLÁDÁNÍ SVĚTOVEKTORŮ

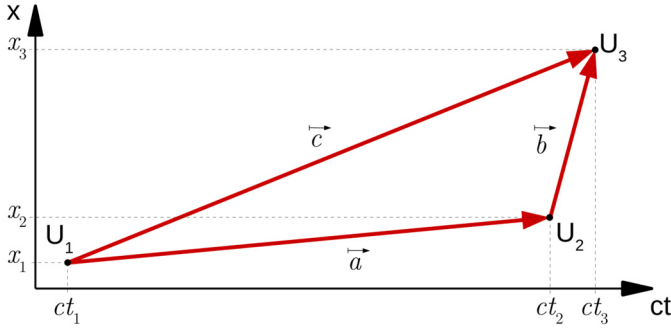
Abychom mohli s pomocí jedněch světovektorů vytvářet jiné podobně, jako tomu bylo u eukleidovských vektorů, musíme je umět sčítat. Protože jsme již na půdě fyziky a nikoli čisté matematiky, měli bychom mít neustále na zřeteli alespoň vzdálený kontakt s experimenty. Při zavádění eukleidovských vektorů byla tím rozhodujícím vodítkem představa šipky (orientovaná tyč v prostoru) a její souřadnice byly až odvozeným konceptem. Při studiu časoprostorové geometrie to je ale naopak – máme zkušenost a jsme schopni měřit pouze souřadnice časoprostorových vektorů (časové intervaly a vzdálenosti podél os), různé v různých vztažných systémech, a až z nich se snažíme odvodit vlastnosti, které jsou na nich nezávislé.

Definujme tedy bez ostychu nejprve sčítání dvou světošipek s pomocí souřadnic. Označíme-li souřadnice světovektoru $\vec{w}_1$ jako $(w_{1t}, w_{1x}, w_{1y}, w_{1z})$ a souřadnice světovektoru $\vec{w}_2$ obdobně $(w_{2t}, w_{2x}, w_{2y}, w_{2z})$, budou souřadnice vektoru $\vec{w}_1 + \vec{w}_2$, který vznikne složením/sečtením obou vektorů, dány výrazem

$$(w_{1t} + w_{2t}, w_{1x} + w_{2x}, w_{1y} + w_{2y}, w_{1z} + w_{2z}).$$

To, že analogie se sčítáním eukleidovských vektorů je velmi přímá, si můžeme

¹⁴Uchýlil jsem se k takovémuto značení, protože se mi zdá jako vhodná kombinace tradiční šipky, která znázorňuje „obyčejný“ vektor v 3D eukleidovském prostoru, a další osy (časové), která je v časoprostorové geometrii kolmá na ty prostorové a přitom s nimi není úplně ekvivalentní. V odborné literatuře se prakticky vždy pracuje pouze ve složkové notaci, takže se s označením časoprostorového vektoru skoro nikdo nepáře. ;-)



Obr. 11: Časoprostorové posunutí $\vec{a}$ z události U_1 do události U_2 a následně posunutí $\vec{b}$ z události U_2 do U_3 má stejný výsledek jako posunutí $\vec{c}$ přímo z U_1 do U_3 – viz analogie s obr. 2

ilustrovat na příkladu tří událostí v 1+1D časoprostoru, které jsou spojeny třemi časoprostorovými šipkami (viz obr. 11).

Když totiž spojíme tři události U_1 , U_2 a U_3 v časoprostoru světošipkami, získáme pro $\vec{a} \equiv \overrightarrow{U_1 U_2}$ souřadnice

$$\left(c(t_2 - t_1), x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \right),$$

pro $\vec{b} \equiv \overrightarrow{U_2 U_3}$ souřadnice

$$\left(c(t_3 - t_2), x_3 - x_2, y_3 - y_2, z_3 - z_2 \right)$$

a pro $\vec{c} \equiv \overrightarrow{U_1 U_3}$ souřadnice

$$\left(c(t_3 - t_1), x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1 \right),$$

pro které ale stejně jako u eukleidovských vektorů platí

$$\begin{aligned} \left(c(t_3 - t_1), x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1 \right) &= \left(c(t_2 - t_1), x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \right) + \\ &+ \left(c(t_3 - t_2), x_3 - x_2, y_3 - y_2, z_3 - z_2 \right). \end{aligned}$$

3.4 PRODLUŽOVÁNÍ A KRÁCENÍ SVĚTOVEKTORŮ

S násobením světovektorů číslem či nějakou skalární fyzikální veličinou je to podobné. Pokud κ bude číslo (např. -1) nebo obecněji konstanta nezávislá na

vztažné soustavě (např. hmotnost, mezní rychlost c nebo časoprostorový interval), můžeme jím časoprostorový vektor násobit prostě tak, že jím násobíme všechny jeho souřadnice: Při standardním označení souřadnic světovektoru $\vec{w}$, budou souřadnice světovektoru $\kappa \vec{w}$ dány uspořádanou čtveřicí

$$(\kappa w_t, \kappa w_x, \kappa w_y, \kappa w_z).$$

Podobně jako u eukleidovských vektorů – až zavedením tohoto druhu násobení můžeme „vyrábět“ jiné světovektory než vektory časoprostorového posunutí. V oddílu 4.1 si podrobněji ukážeme, jak postupovat při zavádění časoprostorové obdoby vektoru rychlosti částice, ale již nyní vám prozradím, že tato definice vychází z definice světovektoru posunutí částice $\Delta \vec{r}$ během intervalu Δt_0 tzv. vlastního času částice (je z hlediska všech inerciálních systémů stejný):

$$\langle \vec{v} \rangle_{\Delta t_0} = \frac{1}{\Delta t_0} \Delta \vec{r} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t_0}.$$

3.5 LINEÁRNÍ KOMBINOVÁNÍ SVĚTOVEKTORŮ

Protože se zatím souřadnice světovektorů chovají stejně pěkně jako uspořádané čtveřice reálných čísel, je asi zřejmé, že lineární kombinace světovektorů bude další hladkou analogií k lineární kombinaci eukleidovských vektorů:

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \kappa_1 \vec{w}_1 + \kappa_2 \vec{w}_2 \Leftrightarrow (w_t, w_x, w_y, w_z) = \\ &= \kappa_1 (w_{1t}, w_{1x}, w_{1y}, w_{1z}) + \kappa_2 (w_{2t}, w_{2x}, w_{2y}, w_{2z}) = \\ &= (\kappa_1 w_{1t} + \kappa_2 w_{2t}, \kappa_1 w_{1x} + \kappa_2 w_{2x}, \kappa_1 w_{1y} + \kappa_2 w_{2y}, \kappa_1 w_{1z} + \kappa_2 w_{2z}). \end{aligned}$$

Tato ekvivalence samozřejmě platí pouze při pevně zadané inerciální vztažné soustavě.

Stejně jako v případě eukleidovských vektorů nám lineární kombinování umožňuje z jedněch vektorů vytvářet vektory jiné.

3.6 VYJÁDRĚNÍ SVĚTOVEKTORŮ V DANÉ BÁZI

Protože hezké algebraické vlastnosti uspořádaných čtveřic jsou naprosto analogické hezkým algebraickým vlastnostem uspořádaných trojic, které jsou tak oblíbené při studiu eukleidovských vektorů, je snad patrné, že všechny uspořádané čtveřice reálných čísel (a, b, c, d) lze získat lineárním kombinováním čtyř, tzv. bázevých, čtveřic: $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ a $(0, 0, 0, 1)$. Je totiž

$$(a, b, c, d) = a(1, 0, 0, 0) + b(0, 1, 0, 0) + c(0, 0, 1, 0) + d(0, 0, 0, 1).$$

Zavedme si nyní, zatím čistě formálně, bázevé světovektory, které budou mít vůči nějaké inerciální vztažné soustavě S výše uvedené souřadnice:

$(0, 1, 0, 0)_S$ – časoprostorový vektor analogický jednotkovému vektoru ve směru osy x , ozn. $\vec{u}_x$.

$(0, 0, 1, 0)_S$ – časoprostorový vektor analogický jednotkovému vektoru ve směru osy y , ozn. $\vec{u}_y$.

$(0, 0, 0, 1)_S$ – časoprostorový vektor analogický jednotkovému vektoru ve směru osy z , ozn. $\vec{u}_z$.

$(1, 0, 0, 0)_S$ – časoprostorový vektor v nějakém smyslu mířící ve směru osy t , ozn. $\vec{u}_t$.

Pokud se odehraje událost v okamžiku $t = 0$ přímo na ose x vzdáleném o x od počátku, přiřadíme jí časoprostorové souřadnice $[0, x, 0, 0]$ a vektor posunutí z počátku $[0, 0, 0, 0]$

$$\Delta \vec{r}_{\text{podél osy } x} = x \vec{u}_x$$

Obdobně pro události přímo na osách y a z je vektor posunutí z počátku

$$\Delta \vec{r}_{\text{podél osy } y} = y \vec{u}_y \quad \text{a} \quad \Delta \vec{r}_{\text{podél osy } z} = z \vec{u}_z.$$

V časoprostorové geometrii jsme sice ještě nezavedli pojmy velikosti a kolmosti, ale přirozeně chceme, aby prostorová část souřadnic fungovala stejně, nebo alespoň velmi podobně jako v eukleidovském prostoru (srovnejte obr. 5 a 9). Události, která se stane v počátku naší 1+3D mříže v okamžiku t po zvoleném startu odčítání času, tj. po okamžiku $t = 0$, jsou přiřazeny souřadnice $[t, 0, 0, 0]$ a lze zavést vektor posunutí z počátku

$$\Delta \vec{r}_{\text{podél osy } t} = t \vec{u}_t$$

i v „časovém směru“. Celkem můžeme předpokládat, že libovolný vektor časoprostoru $\vec{w}$ lze vygenerovat s pomocí lineární kombinace

$$\vec{w} = w_t \vec{u}_t + w_x \vec{u}_x + w_y \vec{u}_y + w_z \vec{u}_z.$$

Koeficienty $(w_t, w_x, w_y, w_z)_S$ pak nazveme souřadnicemi vektoru $\vec{w}$ v bázi $\mathbf{b} = (\vec{u}_t, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

Pokud nás zajímají pouze pohyby částic po přímce, tj. zkoumáme 1+1D časoprostor, vystačíme zatím s jednotkovými světovektory $\vec{u}_t$ a $\vec{u}_x$ o souřadnicích $(1, 0)$ a $(0, 1)$. Opět předpokládáme, že lineárním kombinováním těchto světovektorů lze získat jakýkoli jiný světovektor z 1+1D časoprostoru.

Dosud jsme se zabývali vlastnostmi, které mají časoprostorové vektory naprosto shodné s eukleidovskými vektory ve 4D. Teprve až následující oddíly ukážou na významné rozdíly.

3.7 VZDÁLENOST SVĚTOBODŮ, VELIKOST SVĚTOVEKTORŮ

U eukleidovských vektorů jsme si uvedli, že všechny šipky se stejnou velikostí a stejnou orientací vůči daným osám jsou reprezentací jednoho vektoru. V eukleidovském prostoru jsme mohli mezi dvěma body natáhnout například krejčovský metr a mezi dvě protínající se přímky dát úhломěr. Ale jak bychom měli definovat velikost časoprostorového vektoru, když nám jsou pro měření přístupné pouze jeho souřadnice (které musíme měřit jak metrem, tak hodinami)? Rovněž není jasné, co bychom měli rozumět onou „stejnou orientací vůči daným osám“, když v časoprostoru zatím nemáme definovány úhly a ani žádnou analogii kosinové věty.

Zabývejme se nejprve vzdáleností dvou bodů v časoprostoru v analogii se vzdáleností hřebíků zatlučených do eukleidovské desky. Úlohu hřebíků v časoprostoru zaujímají události – představte si například, že v rychlíku jedoucím rovnoměrně po dokonale hladkých, přímých kolejích blikne u strojvůdce malá LED-diody (událost U_A), což způsobí následné bliknutí jiné LED-diody v posledním vagónu (událost U_B). Mají-li tyto události ve vagónové soustavě po řadě souřadnice $[ct_A, x_A, y_A, z_A]$ a $[ct_B, x_B, y_B, z_B]$, mohl by nás pro výpočet časoprostorové vzdálenosti U_A od U_B jako první napadnout předpis

$$\begin{aligned} & \sqrt{(ct_B - ct_A)^2 + (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \equiv \\ & \equiv \sqrt{(c\Delta t)^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}, \end{aligned} \quad (25)$$

který připomíná zobecnění Pythagorovy věty do časoprostorových souřadnic. Problém s tímto výrazem je, že se při změně jednoho inerciálního vztazného systému (vlak) za druhou (koleje) změní – není tedy vůči této změně invariantní (na rozdíl od vzdálenosti hřebíků při změně otočení soustavy souřadnic či samotné roviny).

My ale již víme, že to, co se při změně jedné inerciální soustavy za druhou nemění, není výraz 25, ale výraz 3 definující časoprostorový interval. Vzhledem k tomu, že invariance tohoto intervalu je zcela univerzálním poznatkem, mohli bychom tuto kombinaci s trochou odvahy považovat za časoprostorovou definici „vzdálenosti“ světobodů, resp. za velikost časoprostorového vektoru posunutí ze světobodu U_A do světobodu U_B :

$$\begin{aligned} \|\Delta \vec{r}\| & \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(ct_B - ct_A)^2 - ((x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2)} \\ & \equiv \sqrt{(c\Delta t)^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Tato definice nám zaručí neměnnost velikosti vektoru vůči různým inerciálním vztazným soustavám, protože platí (viz oddíl 1):

$$\|\Delta \vec{r}\|_S = \|\Delta \vec{r}\|_{S'}.$$

Velikost obecného světovektoru $\vec{w}$ se souřadnicemi (w_t, w_x, w_y, w_z) v nějaké kartézské souřadnicové časoprostorové síti (viz dále) tedy budeme definovat výrazem

$$\|\vec{w}\| \stackrel{\text{def}}{:=} \sqrt{w_t^2 - (w_x^2 + w_y^2 + w_z^2)}$$

a protože předpokládáme, že tento světovektor vznikl z vektoru časoprostorového posunutí „tím správným způsobem“ (viz dále), bude platit rovněž

$$\|\vec{w}\|_{\mathcal{S}} = \|\vec{w}\|_{\mathcal{S}'}. \quad (27)$$

Někoho může trápit, že tímto způsobem definované *velikosti* časoprostorových vektorů mohou být v některých případech nulové, ba dokonce i imaginární (ve smyslu komplexních čísel, nikoli „žijící jen v představách“ :-)). Ukazuje se ale, že tato vlastnost, kromě nezvyku, ničemu nevádí a prostě vyjadřuje odlišnost eukleidovské a časoprostorové geometrie. Tou skutečně nejdůležitější vlastností je *neměnnost* velikosti světovektorů při změně pozorovacího systému.

3.8 SKALÁRNÍ SOUČIN SVĚTOVEKTORŮ

Protože skalární součin dvou eukleidovských vektorů je tak velmi užitečný nástroj, pokusíme se nyní definovat i jeho časoprostorovou obdobu.

I nyní požadujeme, aby operace přiřazování čísla (veličiny) dvěma světovektorům splňovala hezká algebraická pravidla uspořádaných n -tic (vytýkání konstanty, distributivita, komutativita apod.) a zároveň, abychom spojením dvou stejných světovektorů získali druhou mocninu jejich velikosti. Skalární spojení dvou světovektorů budeme značit symbolem $\odot$, požadujeme tedy platnost

$$\vec{w} \odot \vec{w} \stackrel{\text{def}}{:=} w_t^2 - (w_x^2 + w_y^2 + w_z^2) \equiv \|\vec{w}\|_{\mathcal{S}}^2. \quad (28)$$

Z předchozího oddílu přitom plyne, že skalární součin světovektorů se sebou samými je nezávislý na volbě inerciálního systému, ve kterém vyjadřujeme jejich souřadnice.¹⁵

Je-li skalární násobení každého časoprostorového vektoru se sebou samým invariantní vůči změně inerciálního systému, pak to musí platit i u výrazu

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}.$$

Díky lineárním vlastnostem skalárního součinu platí

$$\begin{aligned} \vec{c} \odot \vec{c} &= (\vec{a} + \vec{b}) \odot (\vec{a} + \vec{b}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \vec{c} \odot \vec{c} = \vec{a} \odot \vec{a} + \vec{b} \odot \vec{b} + 2 \vec{a} \odot \vec{b} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \|\vec{c}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2 \vec{a} \odot \vec{b}. \end{aligned} \quad (29)$$

¹⁵Takže bychom mohli psát $(\vec{w} \odot \vec{w})_{\mathcal{S}} = (\vec{w} \odot \vec{w})_{\mathcal{S}'}$.

Protože ale výrazy $\|\vec{c}\|^2$, $\|\vec{a}\|^2$ i $\|\vec{b}\|^2$ jsou ve všech inerciálních systémech stejné, nesmí se při změně jednoho systému za jiný změnit ani skalární součin $\vec{a} \odot \vec{b}$. Můžeme tak psát

$$\left(\vec{a} \odot \vec{b}\right)_S = \left(\vec{a} \odot \vec{b}\right)_{S'}.$$

Abychom našli vyjádření skalárního součinu dvou světovektorů s pomocí jejich souřadnic, stačí si uvědomit, že v rovnici 29 jsou souřadnice (uvažujeme pro jednoduchost pouze 1+1D prostor) $c_t = a_t + b_t$ a $c_x = a_x + b_x$, takže máme rovnost

$$(a_t + b_t)^2 - (a_x + b_x)^2 = (a_t^2 - a_x^2) + (b_t^2 - b_x^2) + 2 \vec{a} \odot \vec{b}.$$

Až na vyjádření skalárního součinu $\vec{a} \odot \vec{b}$ zde máme jen čistě algebraické výrazy s čísly, přičemž úpravou levé strany získáváme

$$\begin{aligned} (a_t + b_t)^2 - (a_x + b_x)^2 &= a_t^2 + 2a_tb_t + b_t^2 - (a_x^2 + 2a_xb_x + b_x^2) = \\ &= (a_t^2 - a_x^2) + (b_t^2 - b_x^2) + 2(a_tb_t - a_xb_x). \end{aligned}$$

Z uvedeného plyne, že skalární součin $\vec{a} \odot \vec{b}$ lze v souřadnicích zúčastněných 1+1D světovektorů vyjádřit jako $a_tb_t - a_xb_x$.

Zobecněním tohoto postupu na světovektory v 1+3D časoprostoru lze nahlédnout, že musí (v karézských souřadnicích) platit

$$\vec{a} \odot \vec{b} = a_tb_t - (a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z).$$

Důsledkem všeho výše uvedeného je, že kombinace souřadnic světovektorů v karézské bázi ve tvaru skalárního součinu nezávisí na volbě inerciálního vztažného systému, tj.

$$a_tb_t - (a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z) = a_t'b_{t'} - (a_{x'}b_{x'} + a_{y'}b_{y'} + a_{z'}b_{z'}).$$

3.9 SKALÁRNÍ SOUČIN A EXTRAKCE ČASOPROSTOROVÝCH SOUŘADNIC

Vraťme se nyní k bázevým vektorům z oddílu 3.6. Jak už bylo uvedeno (ačkoli nedokázáno), každý světovektor $\vec{w}$ lze zapsat ve tvaru lineární kombinace čtyř jednotkových, lineárně nezávislých vektorů:

$$\vec{w} = w_t \vec{u}_t + w_x \vec{u}_x + w_y \vec{u}_y + w_z \vec{u}_z, \quad (30)$$

přitom uspořádanou čtveřici (w_t, w_x, w_y, w_z) nazýváme *souřadnice světovektoru* – první časová a další tři prostorové – v bázi $\mathbf{b} = (\vec{u}_t, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, která je vázaná na daný inerciální vztažný systém.

Protože bázové vektory mají v bázi, kterou samy tvoří, souřadnice $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ a $(0, 0, 0, 1)$, lze snadno z informací z předchozího oddílu sestavit následující tabulku:¹⁶

$$\begin{array}{llll} \vec{u}_t \odot \vec{u}_t = 1, & \vec{u}_t \odot \vec{u}_x = 0, & \vec{u}_t \odot \vec{u}_y = 0, & \vec{u}_t \odot \vec{u}_z = 0, \\ \vec{u}_x \odot \vec{u}_t = 0, & \vec{u}_x \odot \vec{u}_x = -1, & \vec{u}_x \odot \vec{u}_y = 0, & \vec{u}_x \odot \vec{u}_z = 0, \\ \vec{u}_y \odot \vec{u}_t = 0, & \vec{u}_y \odot \vec{u}_x = 0, & \vec{u}_y \odot \vec{u}_y = -1, & \vec{u}_y \odot \vec{u}_z = 0, \\ \vec{u}_z \odot \vec{u}_t = 0, & \vec{u}_z \odot \vec{u}_x = 0, & \vec{u}_z \odot \vec{u}_y = 0, & \vec{u}_z \odot \vec{u}_z = -1. \end{array}$$

Nebo o něco přehledněji:

$\odot$	$\vec{u}_t$	$\vec{u}_x$	$\vec{u}_y$	$\vec{u}_z$
$\vec{u}_t$	1	0	0	0
$\vec{u}_x$	0	-1	0	0
$\vec{u}_y$	0	0	-1	0
$\vec{u}_z$	0	0	0	-1

Z uvedeného plyne, že souřadnice libovolného světovektoru $\vec{w}$ můžeme díky $\odot$ -násobení výrazu 30 jednotkovými světovektory vyjádřit takto (sledujte analogii s eukleidovskými vektory):

$$w_t = \vec{u}_t \odot \vec{w}, \quad w_x = -\vec{u}_x \odot \vec{w}, \quad w_y = -\vec{u}_y \odot \vec{w}, \quad w_z = -\vec{u}_z \odot \vec{w}. \quad (31)$$

Například třetí rovnici získáme vynásobením rovnice 30 zleva světovektorem $\vec{u}_y$, tj.

$$\begin{aligned} \vec{u}_y \odot \vec{w} &= w_t \vec{u}_y \odot \vec{u}_t + w_x \vec{u}_y \odot \vec{u}_x + w_y \vec{u}_y \odot \vec{u}_y + w_z \vec{u}_y \odot \vec{u}_z \Rightarrow \\ &\Rightarrow \vec{u}_y \odot \vec{w} = w_t \cdot 0 + w_x \cdot 0 + w_y \cdot (-1) + w_z \cdot 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Právě skalární součin (resp. $\odot$ -součin) mezi světovektory umožňuje zavést pojem kartézské soustavy či kartézské báze i v časoprostoru, kde je pojem velikosti vektoru a pojem úhlů mezi vektory ne právě názorný. Pro naše účely postačí, když se zde zmíním o tom, že světovektor $\vec{u}$ nazýváme jednotkový tehdy, když platí

$$\|\vec{u} \odot \vec{u}\| = \pm 1$$

a dva vektory $\vec{w}_1$ a $\vec{w}_2$ nazveme na sebe kolmé, když platí

$$\vec{w}_1 \odot \vec{w}_2 = 0.$$

V tomto smyslu je tedy báze $\mathbf{b} = (\vec{u}_t, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, kterou jsme dosud používali, ortonormální neboli kartézská.

¹⁶Takže například $\vec{u}_y \odot \vec{u}_x = (0, 0, 1, 0) \odot (0, 1, 0, 0) = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$ atd.

3.10 SKALÁRNÍ SOUČIN SVĚTOVEKTORŮ A JINÁ BÁZE

Podobně jako u eukleidovských vektorů, při zkoumání vztahů objektů v časoprostoru se nemusíme omezovat na jedinou bázi. Na tomto místě se proto podíváme na vztah mezi různými časoprostorovými ortonormálními bázemi. Pro jednoduchost se nejprve zaměříme na báze v 1+1D časoprostoru.

Protože v bázi $\mathbf{b} = (\vec{u}_t, \vec{u}_x)$ lze vyjádřit *každý* světovektor 1+1D časoprostoru, lze tak vyjádřit i světovektory jiné báze $\mathbf{b}' = (\vec{u}_{t'}, \vec{u}_{x'})$. Předpokládáme, že můžeme psát

$$\begin{aligned}\vec{u}_{t'} &= a_{tt} \vec{u}_t + a_{tx} \vec{u}_x, \\ \vec{u}_{x'} &= a_{xt} \vec{u}_t + a_{xx} \vec{u}_x,\end{aligned}\tag{33}$$

kde čísla a_{tt}, a_{tx}, a_{xt} a a_{xx} tvoří souřadnice světovektorů báze $\mathbf{b}'$ v bázi $\mathbf{b}$. Informace o těchto koeficientech vyextrahujeme s pomocí $\odot$ -násobení jako v předchozím oddílu. Z násobení obou rovnic světovektorem $\vec{u}_t$, tj.

$$\begin{aligned}\vec{u}_{t'} &= a_{tt} \vec{u}_t + a_{tx} \vec{u}_x & / \odot \vec{u}_t, \\ \vec{u}_{x'} &= a_{xt} \vec{u}_t + a_{xx} \vec{u}_x & / \odot \vec{u}_t,\end{aligned}$$

získáme

$$a_{tt} = \vec{u}_{t'} \odot \vec{u}_t \quad \text{a} \quad a_{xt} = \vec{u}_{x'} \odot \vec{u}_t.$$

A zcela analogicky násobením obou rovnic vektorem $\vec{u}_x$ máme

$$a_{tx} = -\vec{u}_{t'} \odot \vec{u}_x \quad \text{a} \quad a_{xx} = -\vec{u}_{x'} \odot \vec{u}_x.^{17}$$

Dosažené můžeme přehledně zobrazit do tabulky

$\odot$	$\vec{u}_t$	$\vec{u}_x$
$\vec{u}_{t'}$	a_{tt}	$-a_{tx}$
$\vec{u}_{x'}$	a_{xt}	$-a_{xx}$

A opět, známe-li koeficienty a_{mn} v této tabulce, nepotřebujeme nové informace k tomu, abychom našli souřadnice vektorů báze $\mathbf{b}$ v bázi $\mathbf{b}'$. Pokud bychom totiž místo výrazů 33 zapsali obráceně

$$\begin{aligned}\vec{u}_t &= b_{tt} \vec{u}_{t'} + b_{tx} \vec{u}_{x'}, \\ \vec{u}_x &= b_{xt} \vec{u}_{t'} + b_{xx} \vec{u}_{x'},\end{aligned}\tag{34}$$

¹⁷Takže například platí $\left(\vec{u}_{t'}\right)_{\mathbf{b}} = (a_{tt}, a_{tx})$.

lze násobením těchto rovnic postupně světovektory $\vec{u}_{t'}$ a $\vec{u}_{x'}$ zjistit, že koeficienty b_{tt}, b_{tx}, b_{xt} a b_{xx} souvisí s koeficienty a_{tt}, a_{tx}, a_{xt} a a_{xx} vztahem

$$\begin{pmatrix} b_{tt} & b_{tx} \\ b_{xt} & b_{xx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{tt} & a_{xt} \\ a_{tx} & a_{xx} \end{pmatrix}.$$

Rovnice 34 lze tedy přepsat na (všimněte si pořadí indexů oproti rovnicím 33)

$$\begin{aligned} \vec{u}_t &= a_{tt} \vec{u}_{t'} + a_{xt} \vec{u}_{x'}, \\ \vec{u}_x &= a_{tx} \vec{u}_{t'} + a_{xx} \vec{u}_{x'}. \end{aligned} \quad (35)$$

3.11 SKALÁRNÍ SOUČIN A TRANSFORMAČNÍ ROVNICE

Nyní si ukážeme, že znalost koeficientů a_{tt}, a_{tx}, a_{xt} a a_{xx} – souřadnic světovektorů jedné ortonormální báze v druhé – je dostatečná i pro převod souřadnic *jakéhokoliv* světovektoru $\vec{w}$ v bázi $\mathbf{b}$ na jeho souřadnice v bázi $\mathbf{b}'$. (Držíme se stále v 1+1D časoprostoru.)

Označíme-li souřadnice $\vec{w}$ v bázi $\mathbf{b}$ jako (w_t, w_x) a jako $(w_{t'}, w_{x'})$ souřadnice $\vec{w}$ v bázi $\mathbf{b}'$, díky definici bázevých vektorů můžeme psát (srovnejte s výrazem 6):

$$w_t \vec{u}_t + w_x \vec{u}_x = \vec{w} = w_{t'} \vec{u}_{t'} + w_{x'} \vec{u}_{x'}. \quad (36)$$

Díky platnosti 35 musí rovněž platit

$$\begin{aligned} \vec{w} &= w_t \left(a_{tt} \vec{u}_{t'} + a_{xt} \vec{u}_{x'} \right) + w_x \left(a_{tx} \vec{u}_{t'} + a_{xx} \vec{u}_{x'} \right) = \\ &= (w_t a_{tt} + w_x a_{tx}) \vec{u}_{t'} + (w_t a_{xt} + w_x a_{xx}) \vec{u}_{x'}. \end{aligned}$$

Srovnáme-li toto vyjádření s vyjádřením 36, získáme mezi souřadnicemi světovektoru $\vec{w}$ v obou bázích převodní vztahy

$$\begin{aligned} w_{t'} &= a_{tt} w_t + a_{tx} w_x, \\ w_{x'} &= a_{xt} w_t + a_{xx} w_x. \end{aligned} \quad (37)$$

Jen malou obměnou výše uvedeného postupu (a nebo prostým převyjádřením) lze získat i opačné převodní vztahy:

$$\begin{aligned} w_t &= a_{tt} w_{t'} + a_{xt} w_{x'}, \\ w_x &= a_{tx} w_{t'} + a_{xx} w_{x'}. \end{aligned} \quad (38)$$

Vidíme tedy, že jednoznačným zadáním vztahu jednotkových světovektorů dvou ortonormálních bází, tj. zadáním matice koeficientů a_{mn} , jsou určeny transformační vztahy i mezi souřadnicemi světovektorů v těchto bázích.

Samozřejmě, pokud bychom uvažovali v rámci 1+3D časoprostoru, museli bychom výše nastíněné schéma přechodu mezi bázemi rozšířit o další dvě složky. Pro převod mezi bázovými světovektory bychom tak měli

$$\begin{aligned}\vec{u}_{t'} &= a_{tt} \vec{u}_t + a_{tx} \vec{u}_x + a_{ty} \vec{u}_y + a_{tz} \vec{u}_z, \\ \vec{u}_{x'} &= a_{xt} \vec{u}_t + a_{xx} \vec{u}_x + a_{xy} \vec{u}_y + a_{xz} \vec{u}_z, \\ \vec{u}_{y'} &= a_{yt} \vec{u}_t + a_{yx} \vec{u}_x + a_{yy} \vec{u}_y + a_{yz} \vec{u}_z, \\ \vec{u}_{z'} &= a_{zt} \vec{u}_t + a_{zx} \vec{u}_x + a_{zy} \vec{u}_y + a_{zz} \vec{u}_z,\end{aligned}$$

kde převodní koeficienty a_{mn} souvisí se skalárními součiny jednotkových členů obou bází takto:

$\odot$	$\vec{u}_t$	$\vec{u}_x$	$\vec{u}_y$	$\vec{u}_z$
$\vec{u}_{t'}$	a_{tt}	$-a_{tx}$	$-a_{ty}$	$-a_{tz}$
$\vec{u}_{x'}$	a_{xt}	$-a_{xx}$	$-a_{xy}$	$-a_{xz}$
$\vec{u}_{y'}$	a_{yt}	$-a_{yx}$	$-a_{yy}$	$-a_{yz}$
$\vec{u}_{z'}$	a_{zt}	$-a_{zx}$	$-a_{zy}$	$-a_{zz}$

Pro převod mezi souřadnicemi časoprostorových vektorů v obou bázích bychom nakonec získali vztahy

$$\begin{aligned}w_{t'} &= a_{tt}w_t + a_{tx}w_x + a_{ty}w_y + a_{tz}w_z, \\ w_{x'} &= a_{xt}w_t + a_{xx}w_x + a_{xy}w_y + a_{xz}w_z, \\ w_{y'} &= a_{yt}w_t + a_{yx}w_x + a_{yy}w_y + a_{yz}w_z, \\ w_{z'} &= a_{zt}w_t + a_{zx}w_x + a_{zy}w_y + a_{zz}w_z.\end{aligned}\tag{39}$$

Celé uvedené schéma tedy stojí a padá s koeficienty přechodu a_{mn} . Zatímco v eukleidovské geometrii lze relativně jednoduše najít jejich názorný význam,¹⁸ u světovektorů je nutné transformační koeficienty hledat o něco složitějšími úvahami.

Než se do toho pustíme, považuji za nutné zdůraznit, že ačkoli jsou souřadnice nějakého světovektoru v různých bázích obecně různé, z geometrického hlediska to jsou pouze „průměty“ tohoto vektoru do „směrů“ určených jednotkovými vektory tvořící báze. Jinými slovy, časoprostorové vektory při změně báze nemění ani svou velikost, ani svůj směr (nemění se skalární součiny s ostatními světovektory), takže každý správně konstruovaný časoprostorový vektor můžeme považovat za svého druhu geometrický objekt, tj. objekt v principu nezávislý na souřadnicích.

¹⁸Protože zde platí $a_{mn} = \cos[\alpha_{mn}]$, kde α_{mn} je úhel mezi m -tým členem ortonormální báze $\mathbf{b}'$ a n -tým členem ortonormální báze $\mathbf{b}$

Protože pozorovatelům, kteří se pohybují časoprostorem, přísluší obecně jiné báze, budou si každý světovektor rozdělovat na různé souřadnice. Nicméně to, co tvoří „kostru“ časoprostoru jsou na souřadnicích nezávislé světovektory, nikoli jejich měření přístupné, ale na vztažném systému (bázi) závislé souřadnice. Z toho přímo plyne, že různí inerciální pozorovatelé sice mezi dvěma stejnými událostmi naměří různé časové intervaly a různé vzdálenosti, ale ve výše uvedeném smyslu vnímají stále stejný časoprostor. Tento poznatek je v teorii relativity jedním z nejhlubších.

Různí pozorovatelé vnímají stejný časoprostor, jen si ho rozdělují na čas a prostor různými způsoby.

4 HLEDÁNÍ ČASOPROSTOROVÝCH KOEFICIENTŮ PŘECHODU

4.1 ČASOPROSTOROVÁ RYCHLOST

Jak nám nový časoprostorový přístup změní náhled na rychlost? Naše stará známá $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ evidentně nemá ten správný časoprostorový charakter. Vzniká tedy otázka, jak bychom měli rychlost definovat jako 1+3D-vektor? Abychom nepokazili ony dobré, tak těžce vydržené vlastnosti světovektorů, nemůžeme rychlost v časoprostoru definovat vztahem

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}}{\Delta t},$$

který nás napadne asi jako první. Proč? Protože Δt není nezávislé na zvolené vztažné soustavě, tj. není to časoprostorový invariant (skalár), takže výsledkem násobení světovektoru neskalárem by již nebyl světovektor.

Po troše uvažování se zdá, že jedinou rozumnou volbou je starat se o změnu světovektoru časoprostorového posunutí částice během krátkého intervalu vlastního času (viz obr. 12), který je všem vztažným systémům společný, tj.

$$\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\vec{r}}{dt_0}. \quad (40)$$

Obr. 12: Ve 2D prostoru v souřadnicové soustavě s osami x a y má rychlost souřadnice $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$. V 1+1D prostoru má ve vztažné soustavě s osami ct a x světovektor rychlosti (světorychlost) souřadnice $\left(\frac{cdt}{dt_0}, \frac{dx}{dt_0}\right)$

Pokud již víte co je to „vlastní čas částice“ a že pro tento čas platí

$$\Delta t_0 = \Delta t / \gamma \equiv \Delta t \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}, \quad (41)$$

kde bylo zavedeno užitečné označení $\gamma \equiv 1 / \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$, můžete pokračovat bez přerušení dále, ostatní si raději pročtete vysvětlovací poznámku¹⁹. Z definice světorychlosti 40 pro její souřadnice v nějaké bázi plyne (časový interval Δt pokládáme za velmi malý)

$$(v_t, v_x, v_y, v_z) = \frac{(c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)}{\Delta t / \gamma} = \gamma \left(c \frac{\Delta t}{\Delta t}, \frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t} \right) = \gamma(c, v_x, v_y, v_z). \quad (42)$$

Časoprostorovou rychlost tedy můžeme s pomocí světovektorů ortonormální báze vyjádřit jako

$$\vec{v} = \gamma c \vec{u}_t + \gamma v_x \vec{u}_x + \gamma v_y \vec{u}_y + \gamma v_z \vec{u}_z. \quad (43)$$

Z tohoto výrazu je zřejmé, že pohybuje-li se částice ve 3D prostoru pouze ve směru osy x , bude její světorychlost v 1+1D prostoru dána výrazem

$$\vec{v} = \gamma c \vec{u}_t + \gamma v_x \vec{u}_x. \quad (44)$$

Dále je vidět, že pokud bude částice v klidu, pak její časoprostorová rychlost bude mířit jen v „časovém směru“. V takovém případě je totiž $\gamma = 1$ a zároveň $v_x = v_y = v_z = 0$ a platí

$$\vec{v} = c \vec{u}_t^{\text{klid}}. \quad (45)$$

Tato rovnice je důležitým výsledkem, který v následujícím oddílu využijeme. Říká, že v *klidovém vztahném systému částice* je časoprostorový vektor rychlosti dán c -násobkem jeho časového jednotkového světovektoru.

¹⁹Vlastní čas částice je doba, kterou částice měří ve své vztahné soustavě na svých hodinkách. :-). Časoprostorový interval mezi dvěma blízkými událostmi, které se odehrávají na stejném místě je $\Delta s_0 = \sqrt{c^2 \Delta t_0^2} = c \Delta t_0$. V jiné soustavě, která se vůči částici pohybuje standardně definovanou (3D) rychlostí v se souřadnicemi $(\Delta x / \Delta t, \Delta y / \Delta t, \Delta z / \Delta t)$ však již tyto události obecně soumísné nejsou, ale časoprostorový interval musí mít stejnou hodnotu. Je tedy

$$\begin{aligned} c \Delta t_0 = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)} &\Rightarrow \Delta t_0 = \frac{1}{c} \Delta t \sqrt{c^2 - \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}{\Delta t^2}} = \\ &= \Delta t \sqrt{1 - \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^2}} \end{aligned}$$

s tím pádem získáme i vztah 41. Protože je $\Delta t_0 = \Delta s_0 / c$, je Δt_0 nezávislé na volbě inerciálního systému.

Tak jako velikost všech světovektorů, i velikost časoprostorové rychlosti se z jejich složek počítá s pomocí vztahu 27:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_t^2 - (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}.$$

Nebo můžeme vyjít, jak se to dělá častěji, z její druhé mocniny a použít skalární součin:

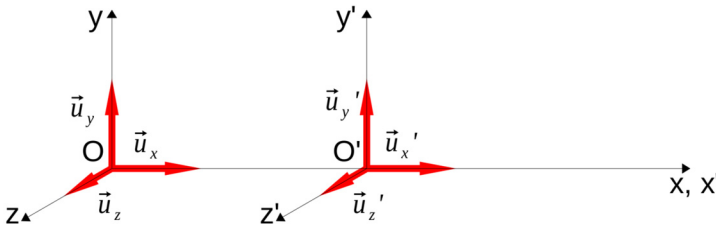
$$\vec{v} \odot \vec{v} = \gamma^2(c^2 - \vec{v} \cdot \vec{v}) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right)^2 (c^2 - v^2) = c^2. \quad (46)$$

Získaný výsledek říká, že přestože se průměty světorychlostí částic se změnou pozorovací báze obecně mění, nejenže jsou i jejich velikosti na volbě báze nezávislé (jak to má u každého správného světovektoru být), ale dokonce pro každou částici má jejich světorychlost stejnou velikost i při jakémkoli jejím pohybu. Můžeme to interpretovat tak, že každá částice se časoprostorem pohybuje světorychlostí o stejné velikosti – velikosti rovné mezní rychlosti c – přestože různí pozorovatelé naměří její různé časové a různé prostorové ($\vec{v}$) složky.

4.2 LORENTZOVA TRANSFORMACE

Po předchozím přípravném oddílu se nyní konečně vrhneme na nalezení převodních koeficientů v transformačních vztazích 39. Z předchozího již víme, že stačí nalézt vztahy mezi světovektory jednotlivých bází.

Uvažujme pro jednoduchost standardní nastavení prostorových os dvou inerciálních systémů, jak je vyobrazeno na obr. 13 – oba pozorovatelé se tedy shodnou na směrech a orientacích svých prostorových os a zároveň se čárkovaný pozorovatel pohybuje vůči nečárkovanému s neměnnou 3D rychlostí o velikosti v_u v kladném směru osy x (a samozřejmě naopak nečárkovaný se pohybuje vůči čárkovanému s neměnnou rychlostí o velikosti v_u v záporném směru osy x).



Obr. 13: Postavení souřadnicových systémů i s jednotkovými vektory v jednotlivých osách

Protože lze předpokládat, že rovnoběžné promítání není v časoprostorové geometrii narušeno, můžeme pro bázevé světovektory ve směrech os y a z rovnou psát $\vec{u}_{y'} = \vec{u}_y$ a $\vec{u}_{z'} = \vec{u}_z$ ²⁰ a zabývat se jen vzájemnými transformacemi bázevých světovektorů $\vec{u}_t, \vec{u}_x$ a $\vec{u}_{t'}, \vec{u}_{x'}$. Světovektor $\vec{u}_{x'}$, tedy může, podobně jako $\vec{u}_{t'}$, zahrnovat lineární kombinaci jak $\vec{u}_x$, tak i $\vec{u}_t$. Obecně tedy je

$$\vec{u}_{x'} = A \vec{u}_t + B \vec{u}_x,$$

kde A a B jsou zatím neznámé koeficienty, které musíme určit. Tyto koeficienty lze najít ze vztahů, které musí splňovat všechny časoprostorové ortonormální vektory, tedy i ty z čárkované inerciální vztažné soustavy – vztahy analogické těm uvedeným v tabulce $\odot$ -násobení na str. 43. Musí tedy například být

$$\vec{u}_{t'} \odot \vec{u}_{x'} = 0. \quad (47)$$

Protože čárkovaná soustava je přirozeně sama vůči sobě v klidu, lze pro vyjádření jejího časového vektoru použít rovnici 45, která jej svazuje s časoprostorovou rychlostí. Zkombinujeme-li tuto rovnici s rovnicí 44, získáme

$$c \vec{u}_t^{\text{klid}} \equiv c \vec{u}_{t'} = \vec{v} = \gamma c \vec{u}_t + \gamma v_u \vec{u}_x,$$

a tedy

$$\vec{u}_{t'} = \frac{1}{c} \vec{v} = \frac{1}{c} \left(\gamma c \vec{u}_t + \gamma v_u \vec{u}_x \right) = \gamma \vec{u}_t + \gamma \frac{v_u}{c} \vec{u}_x \equiv \gamma \vec{u}_t + \gamma \beta \vec{u}_x,$$

kde byl jako β označen poměr v_u/c , jak je poměrně běžné.

Dosadíme-li uvedené do 47, máme

$$\left(\gamma \vec{u}_t + \gamma \beta \vec{u}_x \right) \odot \left(A \vec{u}_t + B \vec{u}_x \right) = \gamma A - \gamma \beta B = 0$$

a mezi koeficienty A a B tedy bude platit vztah

$$A = \beta B.$$

Další vazbu A a B můžeme najít díky vztahu

$$\vec{u}_{x'} \odot \vec{u}_{x'} = -1.$$

Opět přímým dosazením získáme

$$\left(A \vec{u}_t + B \vec{u}_x \right) \odot \left(A \vec{u}_t + B \vec{u}_x \right) = A^2 - B^2 = -1.$$

²⁰Lze to dokázat i formálně. Uvědomíme-li si například, že $\vec{u}_{y'}$ nemá složky ani ve směru osy x ani ve směru z a musí splňovat $\vec{u}_{t'} \odot \vec{u}_{y'} = 0$ a zároveň $\vec{u}_{y'} \odot \vec{u}_{y'} = -1$.

Takže platí

$$A^2 = B^2 - 1 \Rightarrow \beta^2 B^2 = B^2 - 1 \Rightarrow 1 = B^2(1 - \beta).$$

Konečným řešením je

$$A = \beta\gamma \quad \text{a} \quad B = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \equiv \gamma,$$

a tedy

$$\vec{u}_{x'} = \gamma\beta \vec{u}_t + \gamma \vec{u}_x. \quad (48)$$

Nyní již vidíme, že vztahy mezi ortonormálními bázevými světovektory v různých vztažných standardně nastavených systémech dohromady jsou:

$$\begin{aligned} \vec{u}_t' &= \gamma \vec{u}_t + \gamma\beta \vec{u}_x, \\ \vec{u}_x' &= \gamma\beta \vec{u}_t + \gamma \vec{u}_x, \\ \vec{u}_y' &= \vec{u}_y, \\ \vec{u}_z' &= \vec{u}_z. \end{aligned} \quad (49)$$

Tabulka hledaných koeficientů a_{mn} je tímto známa.

Transformační vztahy mezi samotnými souřadnicemi časoprostorových vektorů z jedné inerciální vztažné soustavy do druhé, která se vůči ní pohybuje konstantní rychlostí $u_x = \beta c$ ve směru osy x nakonec budou (viz 39):

$$\begin{aligned} a_t' &= \gamma a_t - \gamma\beta a_x, \\ a_x' &= -\gamma\beta a_t + \gamma a_x, \\ a_y' &= a_y, \\ a_z' &= a_z. \end{aligned} \quad (50)$$

To jsou vyhlášené *Lorentzovy transformace*, které se v úvodních kurzech vyjadřují ve speciálním případě po dosazení souřadnic bodu v časoprostoru, tj. světobodu. Předpokládáme-li, že se pozorovatelé shodnou na časoprostorové události označující společný počátek jejich inerciálních vztažných soustav, dostaneme ze vztahů 50 po drobné úpravě krásně symetrické vztahy

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x), \\ x' &= \gamma(x - \beta ct), \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned} \quad (51)$$

Zjištěním Lorentzových transformací samozřejmě analýza časoprostorové fyziky nekončí, ale teprve začíná. Velkou, nedotknutou oblastí jsou vztahy mezi hybností a energií, které jsou při výše uvedeném přístupu zvláště názorné. To by ale bylo na další příspěvek. :-)

LITERATURA

- [1] EINSTEIN, A.: *Teorie relativity*. VUTIUM, Brno 2005.
- [2] FEYNMAN, R. P., LEIGHTON, R. B., SANDS, M.: *Feynmanovy přednášky z fyziky 1/3*. Fragment, Havlíčkův Brod 2000.
- [3] GALILEI, G.: *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, Toskánsko 1632. (O knize více viz např. http://en.wikipedia.org/wiki/Dialogue_Concerning_the_Two_Chief_World_Systems.)
- [4] HALLIDAY, D., RESNICK, R., WALKER, J.: *Fyzika*. VUTIUM & Prometheus, Brno 2000.
(Již existuje i novější vydání – viz <http://www.vutium.vutbr.cz/fyzika/>)
- [5] KVASNICA, J.: *Matematický aparát fyziky*. (2. vyd.) Academia, Praha 1997.
- [6] KVASNICA, a kol.: *Mechanika*. (2. vyd.) Academia, Praha 2004.
- [7] LANDAU, L. D., LIFSHIC, J. M.: *Úvod do teoretické fyziky 1. Mechanika, elektrodynamika*. Alfa, Bratislava 1980.
- [8] LANDAU, L. D., LIFSHIC, J. M.: *The Classical Theory of Fields. Course of Theoretical Physics, vol. 2* (4th ed.) Butterworth-Heinemann, London 1980.
- [9] MERMIN, N. D.: *It's About Time. Understanding Einstein's Relativity*. Princeton University Press, Princeton 2005.
- [10] MOHRHOFF, U.: *The World According to Quantum Mechanics: Why the Laws of Physics Make Perfect Sense After All*. World Scientific Publishing Company, 2011.
- [11] MOORE, T. A.: *Six Ideas That Shaped Physics. Unit R*. (2nd ed.) McGraw-Hill, New York 2003.
- [12] SCHUMACHER, B.: *Physics in Spacetime. An Introduction to Special Relativity*. Rinton Press, Princeton 2004.
- [13] TAYLOR, J. R.: *Classical Mechanics*. University Science Books 2005.
- [14] TAYLOR, E. F., WHEELER, J. A.: *Exploring Black Holes*. Addison Wesley Longman, San Francisco 2000.
- [15] TAYLOR, E. F., WHEELER, J. A.: *Spacetime Physics. Introduction to Special Relativity*. (2nd ed.) W. H. FREEMAN, New York 1992.

POJĎME SI HRÁT S PROGRAMOVÁNÍM

Jan Krejčí, Pavlína Matysová

ÚVOD

Na workshopu se děti naučily a vyzkoušely, jak se používají různé druhy robotů. Mladší skupina dětí používala tzv. bee-boty a blue-boty (včelky), které jezdily po výukových deskách. Děti naprogramovaly robotickou včelku tak, aby splnila zadaný úkol. Dále si děti vyzkoušely ovládnutí robotů Lego Mindstorms pomocí tabletů či pomocí aplikace EV3 Programmer, kterou využívaly i nejstarší děti. Skupina nejstarších dětí dále programovala pomocí aplikace jBlock didaktické desky mechatronických komponent, které jsou označeny jako Basic Lab Set.

BEE-BOT A BLUE-BOT

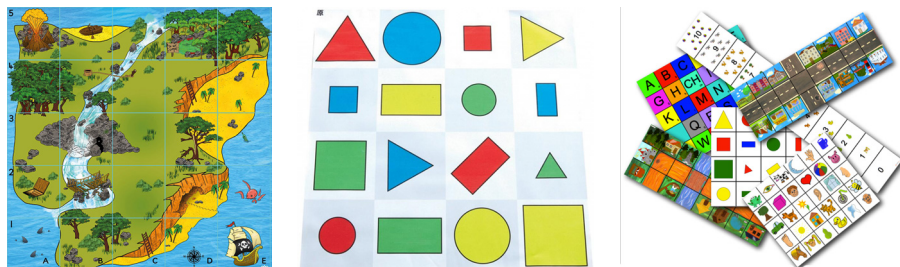
Programovatelná robotická včelka Bee-bot je digitální interaktivní pomůcka na rozvoj logického myšlení, prostorové představivosti, plánování a předmatematických dovedností. U dětí nižších ročníků základních škol je to vhodný nástroj pro výuku základů programování, informatiky a matematiky.



Obr. 1: Bee-bot, Blue-bot

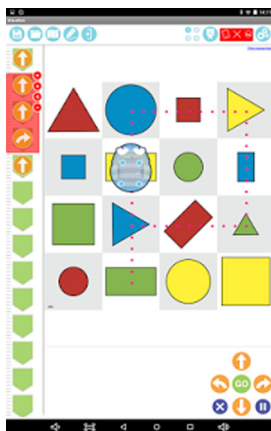
Tato didaktická pomůcka má mnohostranné využití. Při použití různých podložek či obrázků se můžete s dětmi věnovat různým aktivitám (např. poznávání barev, zvířat, ročních období, atd.). Je mnoho dalších možností, jak využít schopnost včelky přemístit se z jednoho bodu do druhého. Pohybuje se totiž po jednotlivých krocích dopředu a vzad, včelka se mimo to může také otáčet doleva či

doprava. Jeden krok odpovídá právě 15 cm, které tvoří rastr (mřížku) didaktických podložek pro jednodušší orientaci dětí v ploše zadaného úkolu. Včelka je schopna vykonávat program až se 40 uloženými kroky.



Obr. 2: Podložky na roboty

Včelku Blue-bot lze navíc pomocí bluetooth spojit s tabletem, aplikace pro tablet mimo vzdáleného ovládání umožňuje včelce otáčení i o úhel 45° .



Obr. 3: Aplikace na ovládání Blue-bota

Děti dopředu musely napřed vymyslet cestu, kterou včelka na určené místo dojede, naprogramovat ji a nechat ji dojet do cíle.

LEGO MINDSTORMS EV3

Lego mindstorms EV3 je sada programovatelných kostek, senzorů a součástí na sestavení robotů od společnosti LEGO. Roboti se musí sestavit a naprogramovat.



Obr. 4: Sada Lego mindstorms

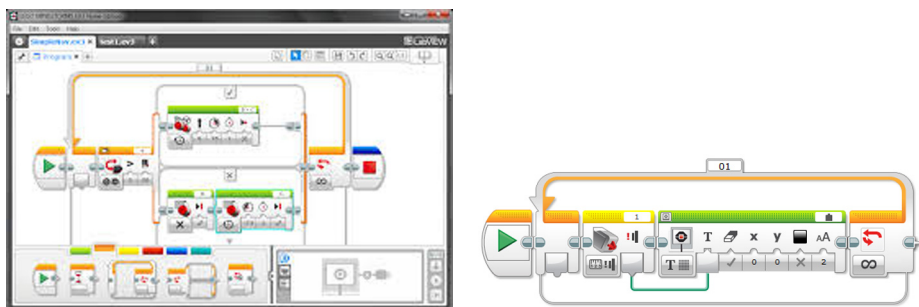
Sada 31313 je určena pro domácí použití, ale i přesto je dodávána s návody na stavění více než 15 robotických LEGO modelů, robot humanoid, střílející škorpión, plazící se had, vysokozdvizný vozík, závodní kamion, elektrická kytara, chodící dinosaur a mnoho dalších. Soupravu 45544, která je učená pro školní použití, je možno rozšířit o soupravu 45560, která umožní konstruovat modely komplexních automatizačních systémů využívaných v průmyslu. Na těchto modelech je pak možno žákům či studentům předvést základní principy těchto průmyslových strojů.

Každý robot je dodáván s vlastními unikátními vlastnostmi a programem, který umožňuje řídit jeho chování. Roboty lze ovládat dálkovým ovládáním, které je součástí sady nebo pomocí aplikace Commander.

Roboti se programují pomocí aplikace EV3 Programmer.



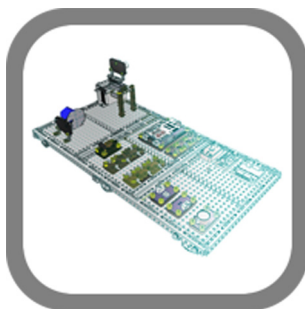
Obr. 5: Programovatelná kostka, ovladač a aplikace Commander



Obr. 6: Aplikace EV3 Programmer

BASIC LAB SET (BLS)

Basic Lab Set (BLS) společnosti Mechatronic Education, s.r.o., je výuková pomůcka a motivační prostředek určený pro podporu technického vzdělávání na úrovni středních odborných, vyšších a vysokých škol.



Obr. 7: Basic Lab Set

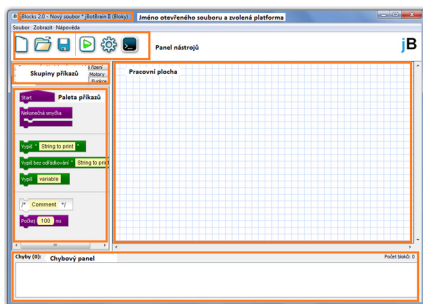
Umožňuje praktické procvičování úloh spojených se studiem problematiky průmyslové automatizace, robotizace a programování.

Pomůcku lze nejen na středních odborných školách implementovat do předmětů jako jsou číslicová technika, logické řízení, spjité řízení, diskretní řízení, měření neelektrických veličin, zpracování signálů, senzory a mikroprocesory v praxi, analogové a digitální zpracování dat, numerické matematické metody, mechatronika, algoritmizace a programování.

Modulární systém umožňuje použití také v oblasti fyzikálního měření, lze jej využít pro stavbu laboratorních měřicích přístrojů, prototypů strojů a funkčních modelů mechanismů.

Set rozvíjí týmovou práci a tvůrčí přístup. Vybízí k hledání originálních řešení za pomoci experimentů.

Basic Lab set se programuje pomocí aplikace jBlocks, což je vizuální vývojový nástroj sloužící k programování proprietárního mikropočítače jBBII.



Obr. 8: jBlocks

LITERATURA

- [1] NOVINKA – robotická včelka BEE-BOT – infracz.cz. Vzdělávání a vydavatelství INFRA [online]. Dostupné z <http://www.infracz.cz/ze-spolecnosti/novinka-roboticka-vcelka-bee-bot/>
- [2] Basic Lab Set – Mechatronic Education. Hlavní stránka – Mechatronic Education [online]. Copyright © 2013 [cit. 4. 11. 2017]. Dostupné z <http://www.mechatroniceducation.cz/sety/bls>
- [3] 31313 MINDSTORMS EV3 – Výrobky – Mindstorms LEGO.com. [online]. Copyright © 2017 LEGO Group. [cit. 4. 11. 2017]. Dostupné z <https://www.lego.com/cs-cz/mindstorms/products/mindstorms-ev3-31313>

GLÓBUS VE TVARU MNOHOSTĚNU

Petr Mentlík

JAKÝ TVAR MÁ ZEMĚ?

Než se se dostaneme k mnohostěnům, měli bychom si zodpovědět otázku, jaký tvar má Země. Je přirozené, že naši (pra)ⁿ předci ji považovali za placatou, přisuzovali ji tvar ploché desky. Planeta je ohromně veliká, a když se člověk podíval od horizontu k horizontu, neměl náš prapředeek důvod přemýšlet o její kulatosti. Respektive mu to bylo asi jedno. Představa placaté Země přetrvala do starověkého Řecka. Například Homér popisuje Zemi jako kotouč obklopený oceánem s nebeskou klenbou ve tvaru přílby.

Záhy po něm začali do tvaru Země vrtat matematici. A o slavná matematická jména není v dalším textu nouze.

Anaximandros z Milétu učil, že Země je kamenný válec ve vzdušném prostoru. Souš pak zobrazil jako kulatý ostrov omývaný oceánem. S myšlenkou kulatosti přišel pravděpodobně jeho žák, slavný matematik, Pythagoras ze Samu. Ten vycházel z toho, že nejdokonalejším tvarem vyskytujícím se v přírodě je těleso, které má při daném objemu nejmenší povrch, tedy koule. A Země musí mít tvar nejdokonalejšího tělesa. Argumenty pythagorejské školy shrnuje jeden z největších učenců starověkého Řecka, Aristoteles ze Stageiry. Pro kulatost Země předložil tři argumenty:

1. Všechny částice mají snahu uspořádat se tak, aby nejtěžší zaujaly střed. Z toho plyne, že všechny části zemského povrchu jsou stejně vzdáleny od středu Země, což je možné jen u koule.
2. Se změnou postavení pozorovatele směrem k severu či jihu se mění obzor i mapa oblohy, což naznačuje zakřivenost povrchu.
3. Stín Země při zatmění Měsíce má vždy podobu kruhu, zřejmě jde o stín koule.

S kulatostí Země již jako s platným faktem počítal další matematik, astronom a správce knihovny v Alexandrii – Eratosthenés z Kyrény. Ten se jako první pokusil vyjádřit velikost Země. A použil proto velice důmyslnou metodu. Ve zkratce: zjistil, že v době letního slunovratu dopadají v pravé poledne sluneční paprsky v Asuánu (dříve Syena) až na dno hluboké studně. Usoudil, že Slunce v té době stojí přímo nad studnou a jeho paprsky směřují do středu Země. V Alexandrii, která leží 5 000 stádií na sever od Asuánu, již paprsky kolmo

nedopadali, ale pod úhlem 83° . Z toho dopočítal, že poloměr Země je přibližně 7 361 km.

Je až neuvěřitelné, jak přesné byly znalosti antických Řeků o tvaru a velikosti Země již někdy ve třetím století před naším letopočtem. O to neuvěřitelněji se jeví dogmatický návrat k myšlence o placatosti Země, která přišla s nástupem středověku. Ve spisu Kosmase Indikopleustése z šestého století našeho letopočtu se můžeme dočíst, že člověk „*se musí vzepřít bludům o kulatosti Země, který prý souvisí s duševním pomatením, jemuž propadli lidé při stavbě babylonské věže. Podle něj má Země tvar obdélníku, ploché desky, jejíž délka je dvakrát větší než šířka; obklopuje ji obdélníkový oceán, za kterým na východě žili lidé před potopou světa; tam se prý rozkládá ráj, tam pramení Nil, Eufrat, Tigris a Ganga, jež protékají pod oceánem a poté znovu vycházejí na povrch*“.
(SKOKAN, 2013, s. 26).

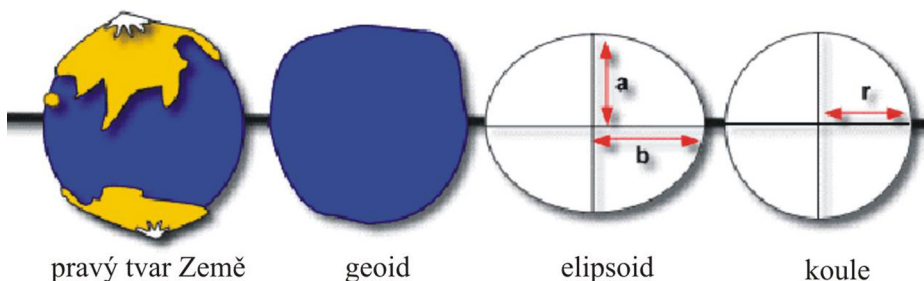
Dogma o placatosti Země bylo definitivně vyvráceno až s velkými objevitelskými plavbami. I tak vzbuzuje údiv fakt, že zatímco ve starověku se po roce 400 př. n. l. o kulatosti Země prakticky nepochybovalo, ostatně byl s přesností na cca 10 % změřen i její poloměr, tak na konci 15. století našeho letopočtu existovali lidé odrazující Kolumba před plavbou na západ, kde by mohl přepadnout přes hranu desky přímo do pekel.

Objevitelské plavby definitivně vyvrátily mýtus o placatosti. Zároveň čím dál přesnější měření zemského povrchu vyvrátily teze o dokonalé kulatosti. Do té začal vrtat v 17. století i Isaac Newton. Zastával názor, že díky rotaci Země kolem osy vzniká odstředivá síla, která způsobila a nadále způsobuje nahromadění hmoty v rovníkových oblastech a úbytek hmoty kolem pólů. Země dle této myšlenky není kulatá, ale na pólech zploštělá a má tedy tvar elipsoidu. Teze o tomto tvaru byly prokázány záhy rozsáhlým měřením délky 1° ve Francii a v Laponsku.

Ani elipsoid však nemodeluje tvar Země přesně. Již na konci 19. století přišel německý matematik a fyzik Johann Benedikt Listing s tělesem, které zdánlivě nejlépe vystihuje tvar Země, s geoidem. Geoid lze definovat jako těleso, omezené k atmosféře střední klidnou hladinou oceánů a moří, probíhající myšleně i pod kontinenty. Střed geoidu zjistíme spuštěním olovnice kdekoli na zemském povrchu. Tím vznikem tížnice směřující do jeho středu. Jednotlivé tížnice se v těžišti protínají. Povrch geoidu je definován tečnou rovinou k povrchu geoidu v daném bodě, přičemž tížnice je na danou rovinu kolmá.

Ale ani geoid nevyjadřuje tvar Země přesně. Vždyť její povrch se neustále mění, čímž se logicky mění i její tvar, i když v mikroskopickém měřítku. Jedná se o nepopsatelně složité a neustále měnící se těleso. Přísně vzato má tedy Země tvar Země.

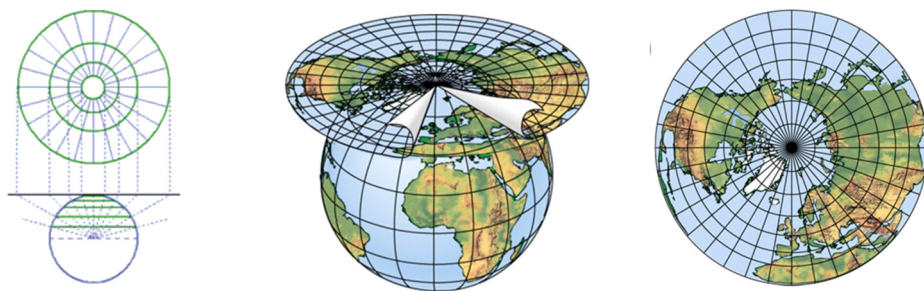
A jaký je důvod celého mého povídání. Jaký má tedy tvar? Země má nesmírně složitý tvar, proto musíme její tvar zjednodušit na geoid. I to je však velice složité těleso, které můžeme dále zjednodušit na elipsoid. Na těleso, které se však na první pohled jen pramálo liší od koule. Proto jej zjednodušíme na kouli.



Obr. 1: Znázornění procesu zjednodušení tvaru Země

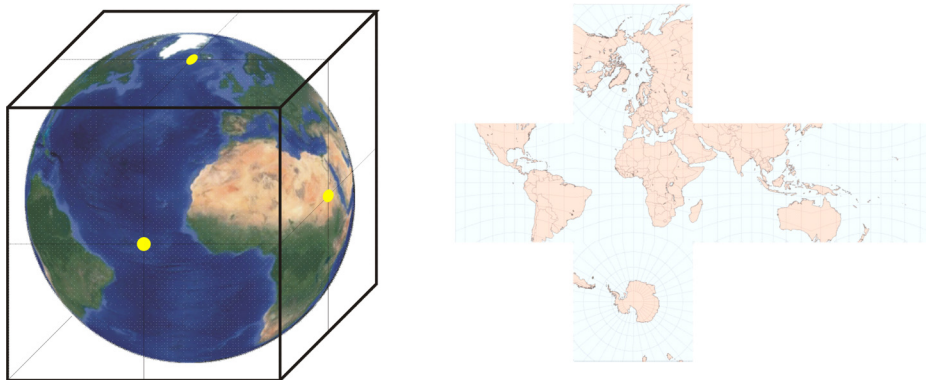
TVORBA PSEUDOGLÓBU

Ale koule mně osobně není příliš sympatická. Proč? Protože ji nelze rozvinout do roviny, tedy neexistuje její síť. Zato síť krychle se učíme rýsovat již od základní školy. Když už jsme u toho zjednodušování, co kdybychom tvar Země zjednodušili na krychli? No dobře, krychle jistě není dobrou aproximací koule (podíl objemu koule krychli vepsané a objemu krychle je přibližně 0,524), nicméně i tak jsme schopni dojít k síti. Pomůžou nám kartografická zobrazení. Přesněji azimutální zobrazení. Ty vznikají zobrazením zemského povrchu do roviny, přičemž se zachovávají azimuty všech hlavních kružnic glóbu procházejících dotykovým bodem. Do této skupiny patří i gnómonická projekce. Jedná se o promítání povrchu referenční koule z jejího středu na rovinu, která je tečnou rovinou koule v bodě dotyku.



Obr. 2: Příklad azimutálního zobrazení, přesněji gnómonické projekce. Je patrné, že směrem od bodu dotyku se zkreslení zvětšuje

Díky té jsme schopni převést část zemského povrchu do roviny. Pokud to provedeme šestkrát, v šesti dotykových bodech, získáme síť krychle s vyobrazením zemského povrchu, můžeme si tak poskládat první pseudoglób.

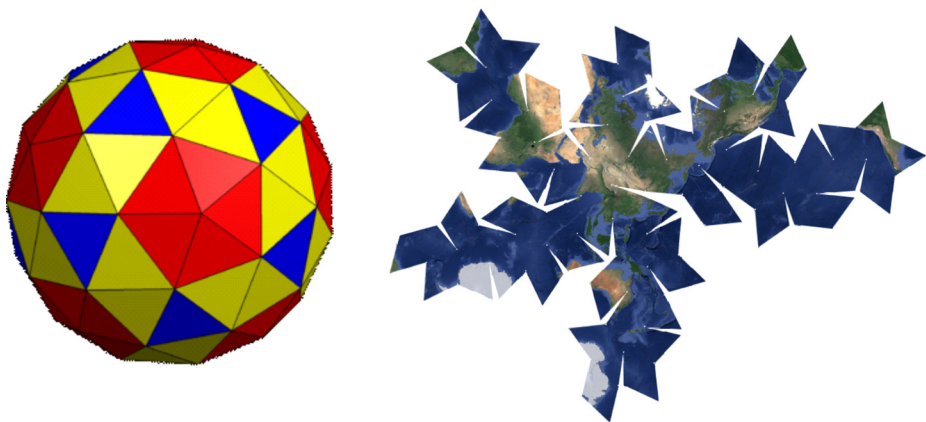


Obr. 3: Vlevo ilustrační obrázek bodů dotyků, ve kterých byla provedena gnómonická projekce, vpravo síť krychle z šesti projekcí

Pokud jsme schopni provést gnómonickou projekci šestkrát a vytvořit síť krychle, jsme teoreticky schopni provést ji n -krát a vytvořit síť dalších mnohostěnů, například Platónských či Archimedovských těles. Přičemž některá z nich se povrchem i objemem blíží kouli. Viz tab. 1

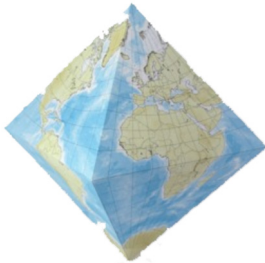
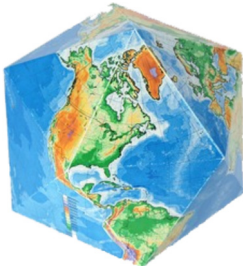
A dál? Je něco kulatějšího? Samozřejmě že ano. Mnohostěny se dají dále a dále ořezávat a tím se limitně blížit kouli. Příkladem budiž pentakis snub icosidodecahedron, polopravidelný 140 stěn, zobrazený na obrázku 4.

Pokud by měl čtenář zájem o síť nejen zmíněných těles, nechť mě kontaktuje.



Obr. 4: Pentakis snub icosidodecahedron a síť pseudoglóbu tohoto tělesa

Tabulka 1

název mnohostěnu	počet stěn	podíl objem koule vepsané a objemu mnohostěnu	pseudoglóbus
osmistěn (oktaedr)	8	0,605	
dvanáctistěn (dodekaedr)	12	0,755	
dvacetistěn (ikosaedr)	20	0,829	
komolý dvacetistěn (polopravidelný dvaatřicetistěn)	32	0,883	

LITERATURA

- [1] BUCHAR, P.: *Matematická kartografie*. 3. přep. vyd. Praha: Nakladatelství ČVUT, 2007. ISBN 978-80-01-03765-2
- [2] FURUTI, A. C.: Map Projections: Pseudoglobes [online]. Dostupné z http://www.sgo.cz/stranky_predmetu/mat/studijni_literatura/Pravidelne_mnohosteny.pdf
- [3] CHMELÍKOVÁ, V.: Pravidelné mnohostěny [online]. 2007. Oborová práce. Karlova Univerzita, Matematicko-fyzikální fakulta. Dostupné z http://www.sgo.cz/stranky_predmetu/mat/studijni_literatura/Pravidelne_mnohosteny.pdf
- [4] KOZÁK, J.: *Zobrazení Země na pravidelných mnohostěnech*. Kladno, 2010. Bakalářská práce, ČVUT. Dostupné z http://maps.fsv.cvut.cz/diplomky/2010_BP_Kozak_Zobrazeni_Zeme_na_pravidelnych_mnohostenech.pdf
- [5] SKOKAN, L.: *Vývoj geografického myšlení*. Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně, Přírodovědecká fakulta, 2013. ISBN 978-80-7414-526-1

POČÍTAČOVÉ SIMULACE VE FYZICE

Jan Petrásek

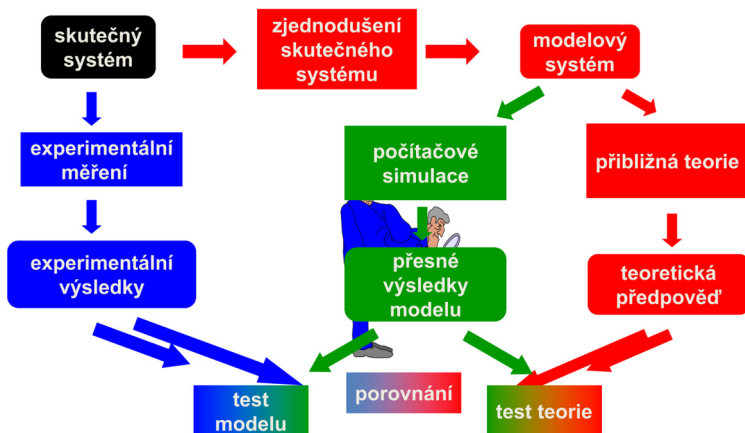
Naše dnešní povídání bude opět fyzika trochu jinak, dnes to bude o počítačích ve fyzice, ale nebojte, více tam bude fyziky nežli informatiky. Na mě to bude dnes netradičně teoretické, ale jinak to tentokrát k nepůjde. Nežli se dáme do práce, tak bych se měl představit. Nejsem fyzikem v pravém slova smyslu, měřící technika a experimentální fyzika je jeden z mých koníčků. Působím jako lektor v počítačové škole Globis se specializací na technologie společností Microsoft corporation a Autodesk Inc, dále pracuji v centru Arpida jako lektor digitální fotografie a počítačové grafiky a jako správce sítě. Na Jihočeské universitě studuji učitelství informatiky a fyziky pro střední školy a pod záštitou laboratoře Embedded systémů se zabírám IoT technologiemi společnosti Microsoft.

Na úvod mám pár otázek na vás, o kterých si myslím, že byste je měli být schopni bez obtíží zodpovědět, abychom si rozuměli. První je předvídatelná, jaké znáte simulace? Předpokládám, že všem se vám vybavila alespoň předpověď počasí, některé mohly napadnout různé trenažery a simulátory, nebo populační dynamika. Někteří můžete znát ze školy různé simulační programky, které využívají učitelé ve výuce fyziky či chemie. Patrně nejzásadnější otázkou této přednášky je, proč provádíme simulace ve fyzice? Jako první asi každého napadne ekonomická stránka věci, protože simulace může, ač se to nezdá, ušetřit nemalé finanční prostředky potřebné na výzkum. Simulace je často prvním ověřením teorie, protože je lacinější nežli experiment a až pokud simulace funguje, přistupuje se k vlastnímu experimentu. Simulace dále dokáže najít optimální parametry pro provedení experimentu, nebo parametry jim velmi blízké, čímž zvýší bezpečnost experimentu i jeho šanci na úspěch. Simulace také mohou sloužit jako finančně laciné ověření výpočtu, méně často pak experimentu.

Jaké jsou hlavní nevýhody simulací? Předpokládám, že většinu vás napadne omezení výpočetního výkonu (paměti i času), který je k dispozici pro simulaci, takže je problém s délkou trvání děje a náročností simulace. Další závažné chyby se simulace dopouští už základním principem svého fungování, pracuje s matematickým modelem a vždy něco zanedbává. Kvalita simulace je hodně závislá na kvalitě vstupních dat, což je samo o sobě problematické, pokud simulace ověřuje novou teorii. S omezením v oblasti techniky a času též souvisí další problém, simulace má omezený počet objektů (např. molekul), které do sebe zvládne zahrnout. V neposlední řadě simulace jako všechno ostatní pronásleduje prorockví vyšetřovatele NTSB Edwarda A. Murpho, jehož zákony platí i pro počítačové

programy z čehož vyplývá, že žádný kód není bez chyby a simulace není nic jiného nežli kód. Zlatý hřeb mezi nevýhodami je, že simulace sama o sobě nestačí na prokázání správnosti nějaké teorie, vždy je potřeba ji experimentálně ověřit. Při bližším pohledu na zmíněné nevýhody se onen zlatý hřeb dal plně očekávat.

Nežli se pustíme do vlastních simulací, tak se pojďme podívat na postup vědeckého výzkumu jako celku, tak jak probíhá, pokud využívá i simulace. Celý postup je krásně ukázán na diagramu (obr. 1).



Obr. 1: Postup výzkumu určitého fyzikálního systému (Předota, 2016)

Jak je vidět na digramu, na skutečném systému se provádí experimentální měření, po potřeby teorie a simulací dojde k jeho zjednodušení a přetvoření v modelový systém. Nad modelovým systémem se dále staví teorie i simulace. Když máme výsledky simulací a teorie, tak je porovnáme vzájemně, čímž teorii podrobíme prvnímu testu. Přesné výsledky ze simulací porovnáme s výsledky měření na reálném systému, měli by být v rámci standartních chyb měření ve shodě. Pokud máme někde neshodu, tak musíme provést úpravy, je dobré, pokud se nám shoduje teorie a experiment, pak je chyba v simulaci, horší je, pokud se shoduje simulace s experimentem, ale s teorií, protože její přepracování je všeobecně náročnější. Úplná noční můra nastane, když není ve shodě nic, protože je potřeba celý diagram projít úplně od začátku a vše vybudovat znovu, následně zpětným porovnáním se můžeme dozvědět, kde byla prve chyba a poučit se.

Počítačových simulací máme nepřeberné množství nejen ve fyzice, ale i v ní máme několik typů simulací. V aplikované fyzice se nejčastěji využívají **simulace spojitých systémů**, v teoretičtější fyzice se více užívají **molekulární simulace**. Molekulární simulace dále dělíme dle dvou kritérií, jedním je pohled na objekt a druhým jsou souřadnice. Z hlediska pohledu na objekt dělíme mole-

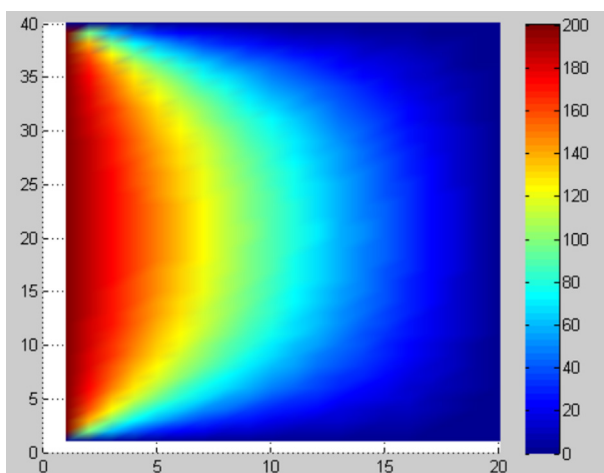
kulární simulace na **atomární** (sledují se pohyby jader) a **elektronové** (kvan-
tové simulace), naopak dle souřadnic dělíme molekulární simulace na **diskrétní**
mřížové modely a **modely se spojitými souřadnicemi**.

SPOJITÉ SYSTÉMY

O spojitých systémech dnes padne jen malá zmínka, protože k jejich simulaci je zapotřebí zvládnutí pokročilé matematické analýzy a numerické matematiky. Spojité simulace totiž řeší parciální diferenciální rovnice, které jsou mnohem složitější nežli rovnice používané v jiných typech simulací, ale na druhou stranu jich je potřeba řešit menší množství. Člověk by si řekl, že když se musí řešit méně rovnic, tak to bude lepší cesta nežli jiné, jak simulovat fyzikální systém, z pohledu srovnání výsledků s experimentem to tak doopravdy je, ale na druhou stranu toto řešení ukrývá nevýhodu v podobě ztráty detailních informací o kontinuu (spojitém systému).

Jak tuto nevýhodu eliminovat a zachovat si eleganci spojitých systémů? Řešením je použití tzv. hybridního modelu, který provádí část simulace spojitě a část částicově, tak zachrání jinak ztracená data. Hybridní modely urychlují výpočet, takže umožňují rychlejší získání výsledků a v případě dostatku paměti i simulovat delší čas. Hybridní modely pracují tak, že rychlé částice (mají vysoké energie) simulují částicově a pomalé částice spojitě.

Jako příklad spojitě simulace si ukážeme šíření tepla od tepelné spirály v prostoru. K vyřešení byl použit Jacobiho algoritmus, což je jedna z numerických metod pro řešení soustav rovnic. Hodně nadsazeně můžeme říct, že numerické metody pracují na principu přibližování se výsledku.



Obr. 2: Šíření tepla plochou. Zdroj: Vlastní simulace

Ještě, nežli se pustíme k molekulárním simulacím, o kterých bude celý zbytek přednášky, tak je důležité si připomenout, že většina interakcí ve fyzice je párových, vezměte si třeba sílu, silou působí jedno těleso na druhé. Pro N atomů máme

$$\text{interakcí} = \frac{N(N-1)}{2} \quad (1)$$

a v každém kroku simulace je potřeba je všechny vyčíslit.

KLASICKÉ MOLEKULÁRNÍ SIMULACE

Konečně se dostáváme k hlavní části dnešní přednášky. V molekulárních simulacích je asi největším problémem volba správného modelu, který reprezentuje danou molekulu, protože každý model molekuly má trochu jiná zanedbání. Další problém je správně zvolit délku simulace a podle toho správné výpočetní vybavení, protože je možné simulovat jen určitý časový úsek vývoje systému. Některé algoritmy a modely umožňují po dokončení simulace simulovat další úsek, který přímo navazuje na skončený.

Simulace typicky probíhá v následujících krocích:

1. Inicializace (načtení systému), načtení parametrů, konfigurace
2. Výpočet sil (probíhá v každém kroku)
3. Po výpočtu sil následuje nová konfigurace a následně se vracíme k bodu 2
4. Po určitém počtu kroků se dělá měření
5. Finalizace (uložení konfigurace a výsledků)

Nyní by se asi slušelo, uvědomit si, v jakých rozměrech se pohybujeme, nežli se budeme problematikou molekulárních simulací dále zabývat. Představme si molekulu vody jako krychli a pojďme spočítat, jak velkou by měla hranu a kolik by se jich vešlo do $1 \text{ nm}^3 = 1 \cdot 10^{-27} \text{ m}^3$.

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{M}{V_m} \Rightarrow V_m = \frac{M}{\rho} \\ \frac{V_m}{N_A} &= V \Rightarrow a = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{\frac{M}{\rho N_A}} = \sqrt[3]{\frac{18,015\,28 \cdot 10^{-3}}{998 \cdot 6,022\,214\,085\,7 \cdot 10^{23}}} \\ a &= \frac{\sqrt[3]{225\,191}}{5\,000\,000 \sqrt[3]{60\,101\,696\,575\,286}} \text{ m} \cong 3,11 \cdot 10^{-10} \text{ m} \\ V &= \frac{M}{\rho N_A} = \frac{18,015\,28 \cdot 10^{-3}}{998 \cdot 6,022\,214\,085\,7 \cdot 10^{23}} \text{ m}^3 \cong 2,997 \cdot 10^{-29} \text{ m}^3 \\ \text{pocet vod} &= \frac{1 \cdot 10^{-27}}{2,997\,466\,132\,662\,9 \cdot 10^{-29}} \cong 33,36 \text{ vod} \end{aligned}$$

Z výpočtu plyne, že do 1 nm^3 se nám vejde 33 molekul vody, a ještě nám v něm zbyde místo. Kromě rozměrů je palčivým problémem časový krok simulace, který je závislý na simulovaném systému a má zásadní vliv na to, zda bude vůbec simulace úspěšná. Pokud zvolíme příliš velký časový krok, dojde ke ztrátě dat, protože nám přetečou proměnné, naopak příliš malý časový krok vede ke problémům s délkou výpočtu a zabranou paměti, simulace může zkolabovat z důvodu nedostatku prostředků. V molekulárních simulacích se běžně simuluje alespoň milion kroků, což odpovídá zhruba 1 ns vývoje systému. Když to spočteme, tak nám vyjde nejběžnější časový krok v molekulární dynamice, který je 1 fs ($1 \cdot 10^{-15} \text{ s}$).

VERLETŮV ALGORITMUS

Jde o základní algoritmus molekulární dynamiky a též o první opravdu funkčně použitelnou aproximací. Zachovává vnitřní energii systému a vychází z naprosto základní rovnice:

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2. \quad (2)$$

Kdy, pokud si označíme polohový vektor jako $\vec{r}$, tak dostaneme Verletův integrátor, což je diferenciální rovnice, který vypadá takto:

$$r_i(t + \Delta t) = 2r_i(t) - r_i(t - \Delta t) + a_i(t)(\Delta t)^2. \quad (3)$$

Jak je vidět, zrychlení dané částice je počítáno z její aktuální polohy. Pro úspěšné zprovoznění algoritmu je potřeba dodržet určité vstupní podmínky, které jsou následující:

- Pokud jsou molekuly umístěny v krystalové mříži je potřeba záporná rychlost jako parametr pro spuštění algoritmu
- Pokud jsou molekuly umístěny ve vzorku náhodně, tak se vše inicializuje na nulu
- Ve všech ostatních případech je potřeba dodat zápornou polohu jako parametr pro spuštění

V podobě pseudokódu by se Verletův algoritmus zapsal následovně:

```

X = 10;
v = 0;
T = 0;
1 : a = -1/x^2;
Dt = 0.01;
V = V + a * Dt;
```

$X = X + v * Dt;$
 $T = T + Dt;$
 If $(X > 0)$ goto 1;

LEEP-FROG ALGORITHMUS

Jde o algoritmus, který je velmi blízký Verletovu algoritmu, ale liší se od něj počátečními podmínkami. Pro správné fungování algoritmu je důležité mít zrychlení a polohu ve stejných časech. Časová náročnost výpočtu se nikterak neliší od Verletova algoritmu. Označme si nyní $\Delta t = h$, pak dostáváme soustavu dvou rovnic:

$$r_i(t+h) = r_i(t) + h \cdot v_i \left(t + \frac{h}{2} \right) \quad (4)$$

$$v_i \left(t + \frac{h}{2} \right) = v_i \left(t - \frac{h}{2} \right) + h \cdot a_i(t) \quad (5)$$

Pro spuštění algoritmu se nejdříve musí uplatnit rovnice č. (5), z polohy v čase t a rychlosti v čase $t - \frac{h}{2}$ získám zrychlení, následně s využitím zrychlení dostanu rychlost v čase $t + \frac{h}{2}$ a konečně z rychlosti v čase $t + \frac{h}{2}$ a polohy v čase t dostanu polohu v čase $t + h$.

INTERAKCE

Každá částice interaguje s částicemi ve svém okolí, takže si vytváří pomyslný list sousedů a přesně tyto interakce jsou ty, které se při simulaci musí vyčíslit pro každou částici. Aby byla simulace proveditelná, počítá jen interakce s částicemi, které jsou od sledované částice do vzdálenosti r_{cutoff} (provádíme tzv. sférické oříznutí). Je jasné, že se tímto dopouštíme velmi výrazné chyby, ale tato chyba je dobře korigovatelná pomocí matematických metod, takže vzniklá výslední chyba není fatální. Problematika sférického oříznutí je velmi důležitá zejména v systémech, které počítají Coulombickou interakci. Nesmíme rovněž zapomínat na to, že se zvyšováním teploty systému nám narůstá energie jednotlivých částic.

RADIÁLNÍ DISTRIBUČNÍ FUNKCE (RDF)

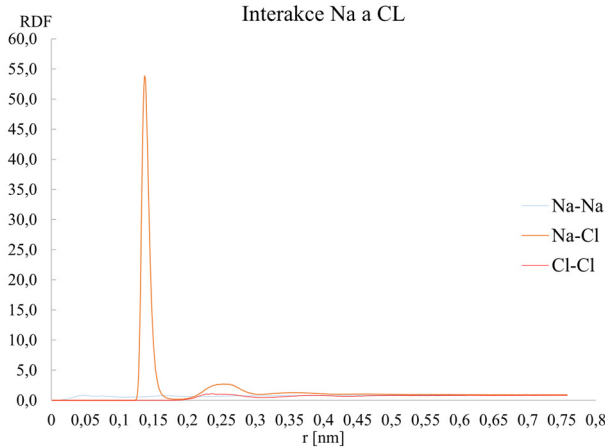
V literatuře se též můžeme setkat s označením párová korelační funkce. Podle názvu tato funkce působí děsivě a musím říct, že mě osobně chvilku trvalo pochopení její interpretace, ale ve skutečnosti je to velmi lehké. Úplně nejjednodušší popis je, že udává počet sousedních částic v závislosti na vzdálenosti jejich středů. Výsledkem je bezrozměrné číslo, které je normované vůči úplně náhodnému rozložení a jde o základní strukturní veličinu molekulární dynamiky. Pro ty z vás, kteří máte rádi matematické popisy, tak pro jednu částici dostávám:

$$g(r) = \frac{N_1(r, \Delta r)}{\frac{N-1}{V} 4\pi r^2 \Delta r} \quad (6)$$

a pro všechny páry v simulaci:

$$g(r) = \frac{N_1(r, \Delta r)}{\frac{N(N-1)}{2} \cdot \frac{4\pi r^2 \Delta r}{V}} \quad (7)$$

v rovnicích číslo (6) a (7) je N počet částic, r je vzdálenost a V je objem. Pojďme si po zdlouhavé teorii ukázat opět nějaký konkrétní příklad simulace, interakci Na a Cl.



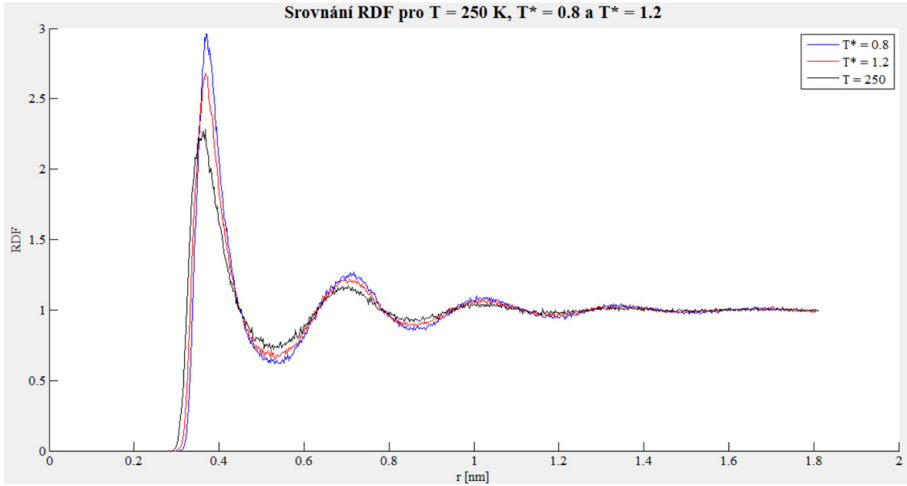
Obr. 3: RDF interakce Na–CL, Na–Na a Cl–Cl, zdroj: vlastní simulace

Z grafu je patrné, že vzájemná interakce chlóru a sodíku je mnohem četnější nežli interakce jednotlivých prvků sami se sebou. Také vidíme, že nejvíce jich je v okolí vzdálenosti středů molekul 0,14 nm. Bystří si všimli, že v okolí vzdálenosti 0,25 nm nastává sekundární maximum pro interakce Na–Cl a zároveň se překrývá s maximem pro vzájemné interakce molekul chlóru.

Na druhém příkladu si pojďme ukázat, jak ovlivňuje RDF teplota systému a s ní související kinetická energie částic. Druhý příklad je vzájemnou interakcí molekul Argonu.

V grafu na obrázku 4 je možné vidět, jak se od sebe liší RDF totožného systému argonu, ale při různých teplotách systému. Modrá křivka znázorňuje RDF pro teplotu 94,17 K, červená pro 141,25 K a černá pro 250 K. V grafu je symbol T^* , což je redukovaná teplota, kterou se běžně označují teploty systémů v molekulární dynamice. Přepočítání mezi T^* a T (tedy termodynamickou teplotou) je velmi jednoduchý:

$$T^* = \frac{TR}{\varepsilon}. \quad (8)$$



Obr. 4: RDF Ar–Ar pro různé teploty systému

Je vidět jedna zajímavá věc a to ta, že pro vyšší teploty má RDF méně výrazné překmitý proti ustálenému stavu, celkově rychleji dosáhnou ustálené (průměrné) hodnoty počtu interakcí.

TERMOSTATY

Termostaty jsou nedílnou součástí simulací, protože umožňují udržovat systém v nějaké stálé teplotě po celou dobu průběhu simulace. Umožňují vůbec provádět simulace NVT systémů (systémů s konstantním počtem částí, objemem a teplotou). Další jejich výhodou je eliminace závislosti RDF na teplotě, protože je možné simulovat při stanovené teplotě a simulovat tak více systémů, které chceme vzájemně porovnat. Okamžitou teplotu obvykle značíme T_k a odpovídá:

$$T_k = \frac{2K}{bk_b}. \quad (9)$$

Kde b je počet stupňů volnosti částice, k_b je Boltzmannova konstanta a K odpovídá:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2. \quad (10)$$

Střední hodnota T_k je rovna T .

Asi nejpoužívanějším termostatem v simulačních programech na molekulární dynamiku je konfigurační termostat, jehož matematický popis je v tuto chvíli nad naše síly. Běžně se používá pro systémy s našivou rychlostí, systémy, kde rozložení rychlostí neodpovídá Boltzmanovskému. Nesleduje totiž kinetickou, ale potenciální energii a její první i druhou derivaci.

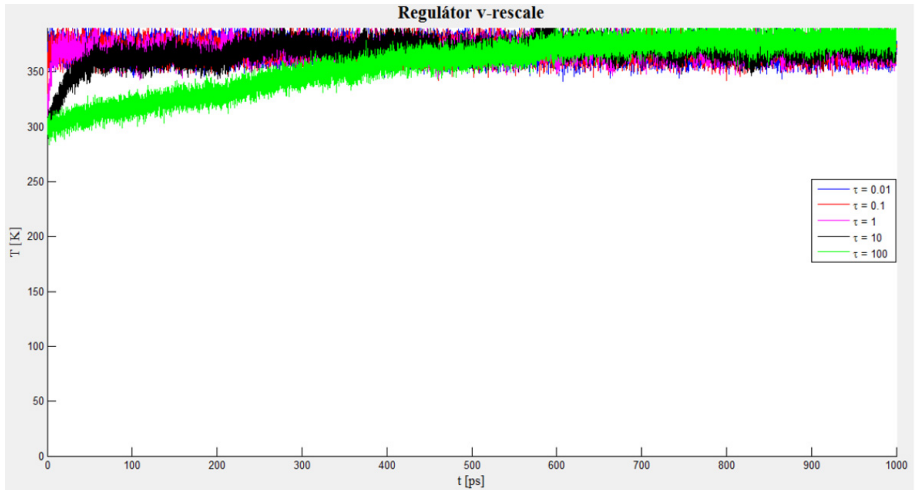
Nejjednodušším termostatem, jehož užití po celou dobu simulace může přinést spoustu potíží chyb ve výsledcích je přeskálování. V jednom kroku vždy dostane systém na požadovanou teplotu opravdu silným zásahem do systému. Teplotní fluktuace jsou naprosto minimální a znatelné jen ve chvíli, pokud se uloží před zákrokem termostatu. Je vhodné jeho užití pro rozjezd simulace, kdy dokáže systém uklidnit, ale následně je potřeba jej vyměnit. Termostat je popsán následujícími rovnicemi.

$$v_i \rightarrow v'_i = v_i \sqrt{\frac{T}{T_{kin}}} \quad (11)$$

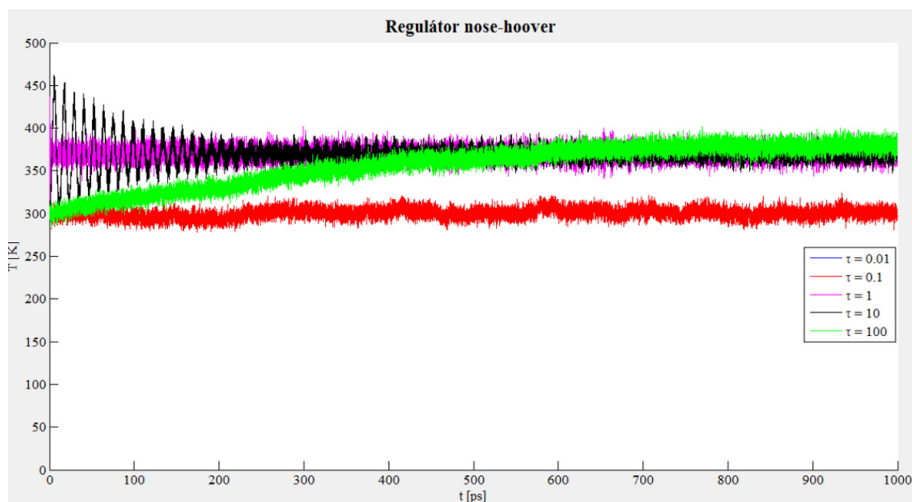
$$K' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i'^2 \quad (12)$$

$$T'_k = \frac{\sum_{i=1}^N m_i v_i'^2 \cdot \left(\frac{T}{T_k}\right)}{bk_b} = T \quad (13)$$

Poměrně běžnou regulací druhého řádu je Nosé-Hooverův termostat. Ten vkládá termostat jako virtuální částici do systému. Termostat má vlastní kinetickou energii. Jeho výhodou je zachování správného kanonického vzorkování rychlostí. Na následujících obrázcích je vidět průběh teploty pro různé relaxační časy (kroky, po kterých dochází k regulaci).



Obr. 5: Průběh teploty při vytápění systému z 300 K na 380 K konfigurační regulátor, zdroj: vlastní simulace



Obr. 6: Průběh teploty při vytápění systému z 300 K na 380 K regulátor Nosé-Hooverův, zdroj: vlastní simulace

PROGRAMY PRO FYZIKÁLNÍ SIMULACE

- Matlab a Simulink respektive Octave – spojité systémy i MD a MC
- Gromacs, Amber – Molekulární dynamika
- Multisim – elektrické obvody
- Algodo – didaktické simulace fyziky a techniky

LITERATURA

- [1] PŘEDOTA, M.: *Přednášky předmětu PFM*. České Budějovice, 2016.
- [2] JELÍNK, P.: *Přednášky předmětu PFM: Simulace kontinua*. České Budějovice, 2016.
- [3] VALDMAN, J.: *Přednášky k předmětu Numerická matematika I*. České Budějovice, 2016.
- [4] DANIŠ, S.: *Základy programování v prostředí Octave a Matlab*. Praha: Matfyzpress, 2009. ISBN 978-80-7378-082-1.

PÁN BLESKU A HROMU, NIKOLO TESLA

Jan Petrásek

Naše dnešní povídání bude opět fyzika trochu jinak, dnes to bude o jedné z největších a nejspornějších osobností fyziky a jeho vynálezech. Na mě to bude dnes netradičně teoretické, ale jinak to tentokrát nepůjde. Nežli se dáme do práce, tak bych se měl představit. Nejsem fyzikem v pravém slova smyslu, měřicí technika a experimentální fyzika je jeden z mých koníčků. Působím jako lektor v počítačové škole Globis se specializací na technologie společností Microsoft corporation a Autodesk Inc, dále pracuji v centru Arpida jako lektor digitální fotografie a počítačové grafiky a jako správce sítě. Na Jihočeské universitě studuji učitelství informatiky a fyziky pro střední školy a pod záštitou laboratoře Embedded systémů se zabírám IoT technologiemi společnosti Microsoft.

Nikola Tesla se narodil za bouřky dne 10. 7. 1856 v Rakousko-Uherském Smijanu. Po absolvování gymnázia v Karlovaci studoval matematiku a fyziku na polytechnice ve Štýrském Hradci. Profesori si brzy všimli jeho talentu a dovolili mu pomáhat při fyzikálních experimentech. Na přání otce studoval v letním semestru roku 1880 na Universitě Karlově, ale po smrti otce studia na UK zanechal.

Mezi lety 1880 až 1884 působil jako elektroinženýr v telekomunikační společnosti v Budapešti a roku 1884 nastupuje do Edisonovy General Electric Company v Paříži, což se mu později stává osudné. Po neshodách s Edisnem (Edison zastává stejnosměrný proud, ale Tesla se jej snaží přesvědčit pro podporu střídavého) opouští jeho firmu a v roce 1886 založil vlastní firmu Tesla Electric Light & Manufacturing, a o dva roky později dotahuje svůj vynález asynchronního motoru na střídavý proud, čím definitivně odstartoval tzv. válku proudů. Již roku 1887 podepisuje spolupráci s firmou Westinghouse Electric, která byla největším konkurentem Edisonovy Electric Company (dnešní General Electric). S podporou Westinghouse Electric staví v roce 1899 vlastní laboratoře v Colorado Springs. V 90. letech se spory mezi Teslou a Edisonem ještě více vyhroutily, válka proudů vrcholí, Edison vynakládá velké prostředky a úsilí na diskreditaci Teslova vynálezu, aby si udržel příjmy ze stejnosměrných zařízení. Prvním triumfem Tesly v této válce bylo roku 1896 uvedení do provozu velké elektrárny s Teslovými generátory na střídavý proud firmou Westinghouse Electric Corporation na Niagarských vodopádech.

Na konec byl roku 1916 vyznamenán Edisonovou medailí. V letech 1936 až 1937 pobýval v Československu a dne 28. 11. 1936 mu byl udělen čestný titul doktora technických věd (dr. h. c.) Českého vysokého učení technického v Praze, následně dne 10. 4. 1937 mu byl udělen čestný doktorát i na VUT v Brně. Celkem po světě získal 15 čestných doktorátů a řadu dalších ocenění, mimo jiné byl na své narozeniny 10. 6. 1937 vyznamenán Řádem Bílého lva I. třídy. Tesla předpověděl vznik internetu i problém s parkováním v současných velkých městech. Od dětství trpěl obsedantně kompulzivní poruchou a po úraze hlavy se mu spustila epilepsie. Mimo němčiny, francouzštiny, angličtiny, maďarštiny a chorvatštiny hovořil i česky. Přes všechny své velké úspěchy umírá v chudobě a osamocen v pokoji hotelu New Yorker dne 7. 1. 1943.

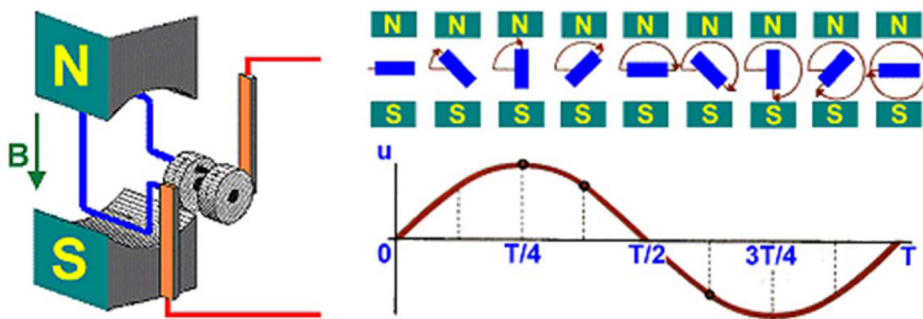
Cílem výzkumu Tesly byl bezdrátový přenos elektřiny, tedy možnost napájet všechny spotřebiče bez použití vodičů. Pracoval na využití a zdokonalení principů, na nichž je založen např. rádiový přenos (včetně televize), automobilové zapalování, telefon, nebo výroba a přenos střídavého proudu. Vždy se snažil převést své poznatky do praxe.

Jeho životní moto: „*Pokud chcete porozumět vesmíru, uvažujte o energii, frekvenci a vibracích.*“

Nikola Tesla

STŘÍDAVÝ PROUD

Jde o zcela bez pochyby o nej převratnější vynález Nikoli Tesly, který dnes a denně používáme úplně všichni, máme jej totiž doma v zásuvce. Na rozdíl od stejnosměrného proudu neprochází obvodem stále stejným směrem, ale směr jeho toku je závislý na čase. Vzniká otáčením vodiče v magnetickém poli, respektive rotací magnetického pole kolem vodiče.



Obr. 1: Vnik a průběh jednofázového elektrického proudu, zdroj [11]

Střídavý proud, respektive napětí, je pospaný následujícími rovnicemi:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (1)$$

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (2)$$

v rovnicích jsou hodnoty s indexem m tzv. amplitudy (maxima), φ_0 je fázový posuv oproti ostatním fázím, pokud se budeme bavit o Teslově původní koncepci je $\varphi_0 = 0$, dále pak se v rovnicích vyskytuje ω , což je tzv. úhlová frekvence a ta je:

$$\omega = 2\pi f. \quad (3)$$

Hodnoty napětí, které jsou uvedeny například pro zásuvku v domě, jsou tzv. efektivní hodnoty, tedy přepočet, jaká hodnota stejnosměrného proudu má stejné tepelné účinky, jako udaná hodnota střídavého proudu. Onen přepočet je popsán rovnicí (4) pro elektrické napětí.

$$U_{ef} \approx 0,707 \cdot U_m \quad (4)$$

Otázka pro vás, jaká je hodnota maximálního napětí v zásuvce, pokud jeho efektivní hodnota je 230 V?

ASYNCHRONNÍ MOTOR

Tesla jej vynalezl roku 1888, kdy si jej nechal patentovat, ale pracoval na něm již u Edisna, který se mu vysmál. Točivé magnetické pole vzniká, když jsou dvě cívky postaveny kolmo k sobě a napájeny střídavým proudem o fázi 90° . Pro reálné fungování motoru byly ovšem zapotřebí dvě dvojice cívek, které byly napájeny vždy ve fázi 90° , takže dvě protilehlé cívky byly napájeny protifází. Oproti Edisonovým stejnosměrným motorům nepotřebuje komutátor, což jej činní levnější na výrobu i prodlužuje jeho životnost.

TESLŮV TRANSFORMÁTOR

Jinak též zvaný Teslova cívka, byl pro vědce dlouhá léta záhadou, princip jejího fungování pochopili fyzici až v roce 1957, tedy téměř 80 let po jejím objevení Teslou. Cívka pracuje na principu rezonančního vzrůstu. Základní částí je vysokonapěťový transformátor, dodávající budící napětí. Primární cívka s malým počtem závitů spolu s kondenzátorem C tvoří paralelní rezonanční obvod, který je naladen na stejný kmitočet jako sekundární cívka. Jiskřiště plní funkci spínače. Sekundární cívka s vysokým počtem závitů je umístěna v ose primární cívky. Její rezonanční kmitočet závisí na její indukčnosti, parazitní mezizávitové kapacitě a na případné přídavné kapacitě toroidu. Vysokonapěťový transformátor nabíjí přes vinutí primární cívky kondenzátor C. Po dožení určitého napětí přeskočí v jiskřišti jiskra, která připojí nabitý kondenzátor paralelně k primární

cívce. Rezonanční obvod začne kmitat a vykoná určitý počet tlumených kmitů. Po dobu trvání těchto kmitů se v sekundární cívce indukuje vysokofrekvenční střídavé napětí. Po vybití kondenzátoru výboj v jiskřišti zanikne a kondenzátor se odpojí od primární cívky a celý proces se opakuje.



Obr. 2: Teslova cívka při výboji, zdroj [4]

MÝTY A FAKTA

Protože osobnost Tesly je opředena mnoha mýty, tak bych rád na některé z nich poukázal a uvedl je na pravou míru. Vraťme se tedy zpět od fyziky k Teslovým vynálezům a jeho osobnosti.

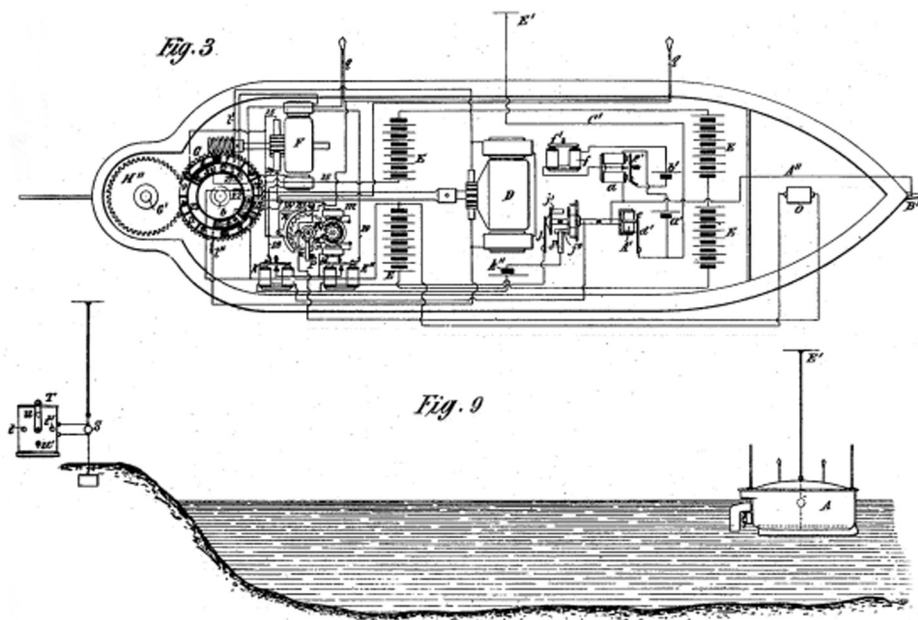
RENTGEN

Všichni dobře víme, že objevitelem rentgenu je Wilhem Röntgen, ale jak s tím souvisí Tesla? Teslovi se totiž zcela náhodně podařilo pořídit první rentgenovou fotografii v roce 1895 a je na ní zachycen slavný spisovatel, a Teslův přítel, Mark Twain. Svůj objev paprsků X (záření RTG) oznámil Röntgen 8. 11. 1895, což je velmi těsně po tom, co Tesla pořídil svou fotografii. Tesla na rozdíl od Röntgena nemohl prozkoumat vznik oné podivné fotografie, protože mu vyhořela laboratoř, takže prvenství po zásluze patří Röntgenovi, i když na totéž přišli oba nezávisle prakticky ve stejnou dobu. Pro pořízení oné záhadné fotografie Twaina použil Tesla Gesslerovu trubici, předchůdce dnešních zářivek, ale o tom, že vydává RTG záření neměl ani ponětí. Po tom, co Röntgen oznámil svůj objev začal Tesla experimentovat se silnými zdroji RTG záření a byl s Röntgenem v kontaktu.

RÁDIO

Rádio je samo o sobě velmi zvláštní vynález. Všeobecně se má za to, že rádio vynalezl Marconi, ale jde o jeden z velkých omylů, protože rádio si několik let před ním patentoval Tesla a Teslovo prvenství soud potvrdil až několik měsíců

po jeho smrti v roce 1943. Teslovi se podařilo nejen sestavit bezdrátový telegraf (obdobně to dokázal i Marconi), ale také sestavil radiové ovládání, ano Tesla může za technologii, která umožňuje řízení dronů, ale i spousty dalších modelů. V roce 1896 předvedl veřejnosti model lodi, který byl plně ovládán rádiem.



Obr. 3: Radiocontroll mechanismus uvnitř lodi, zdroj: [13]

KULOVÝ BLESK

Kulový blesk je nepříliš vzácný přírodní úkaz, který je pro fyziky stále velkou neznámou. Jednou z hypotéz, jak by mohl vznikat je pomocí oxidace křemíku. Malé kousíčky křemíku spolu s kyslíkem a uhlíkem vytvoří atomorní křemík a oxid křemenatý. V ionizovaném prostředí vše oxiduje a uvolňuje se energie v podobě kulového blesku. Kulový blesk je obtížně zkoumatelný objekt, který ovšem dokáže napáchat velké škody.

Mýtus o tom, že se Teslovi podařilo vytvořit v laboratořích Colorado Springs kulový blesk je opravdu pouze mýtem. O kulovém blesku nehovořil nikdo z Teslových asistentů a ani sám Tesla se o jeho výskytu v laboratoři nezmiňuje v žádných poznámkách. Pravdou však zůstává, že laboratoře v Colorado Springs obsahovaly největší Teslovu cívku historie. A co slavný obraz Tesly sedícího vedle své cívky mezi blesky? Ten je podvrh, vznikl technikou dvojité expozice, tedy tak, že se Tesla fotografoval u vypnutého transformátoru, následně vytografoval transformátor v činnosti a oba záběry sloučil do jednoho snímku.

BEZDRÁTOVÝ PŘENOS ENERGIE PO CELÉM SVĚTĚ

Skutečně šlo o Teslův cíl, ale zde slavný vynálezce šlápl vedle, tato vize se po přezkoumání se současnými znalostmi ionosféry ukázala utopickou. Systém měl využívat Shumann-Teslovu rezonance a pomocí ionosféry doručovat energii kamkoliv na planetě. Z finančních důvodů nebyl proveden experiment, ale lokálně na pozemcích laboratoří ve Wardencliff se podařilo přenos energie realizovat na několik desítek metrů. Tesla tento dílčí úspěch rád používal jako salonní trik, aby upoutal pozornost mecenášů. Původně měla věž ve Wardencliff sloužit ke komunikaci přes Atlantik, ale ani toto se nikdy neuskutečnilo.

VYNALEZL SMRTÍCÍ PAPRSKY?

Jaká je pravda okolo jedné z největších Teslových záhad se již asi nedovíme. Je pravda, že svými experimenty, ale především výpočty Tesla dal teoretický základ pro vznik laseru, ale pravdou také zůstává, že žádný z jeho laborantů nepotvrdil výzkum v tomto směru. Musíme si uvědomit, že ve 30. letech byla velká ekonomická krize a Tesla měl problém shánět sponzory pro svoje velkolepé projekty, kterým ještě tehdy málo kdo věřil. Dalším faktem je, že se Teslovi zhoršil zdravotní stav, více se na něm projevila obsedantně kompulzivní porucha. Do dnes tedy nevíme, zda šlo o Teslovu strategii na získání prostředků pro výzkum, nebo výplod nemocí zasažené mysli, jisté je jen to, že experimentální cestou žádné paprsky smrti nerealizoval.

LITERATURA

- [1] Teslathinker. In: *Wikimedia* [online]. 2017 [cit. 2017-07-06]. Dostupné z: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/8/87/Teslathinker.jpg/300px-Teslathinker.jpg>
- [2] Sedmytesla. In: *Idbes.cz* [online]. Praha: MF Dnes, 2016 [cit. 2017-07-06]. Dostupné z: <http://blogadmin.idnes.cz/blog/16428/389385/sedmytesla.jpg>
- [3] The 10 Inventions Of Nikola Tesla That Changed The World. *Freedomtek* [online]. 2017 [cit. 2017-07-06]. Dostupné z: http://www.freedomtek.org/en/texts/nikola_tesla_interview_1899.php
- [4] Teslacoil. In: *Toptenz* [online]. 2017 [cit. 2017-07-06]. Dostupné z: <http://www.toptenz.net/wp-content/uploads/2015/07/teslacoil.jpg>
- [5] *TeslaFoco* [online]. In: [cit. 2017-07-06]. Dostupné z: http://1.bp.blogspot.com/-_MahR-4Dew/UDWJFQ-cuKI/AAAAAAAAAmU/un0UcMbnIsM/s1600/TeslaFoco.jpg

- [6] Kult Nikola Tesly. *Zahadyazajimavosti* [online]. Klub psychotroniky a UFO, 2016 [cit. 2017–07–06]. Dostupné z: <http://www.zahadyazajimavosti.cz/index.php/osobnosti/883-kult-nikola-tesly>
- [7] Nikola Tesla. *Osobnosti.cz* [online]. Praha: TISCALI MEDIA, 2017 [cit. 2017–07–06]. Dostupné z: <http://zivotopis.osobnosti.cz/nikola-tesla.php>
- [8] Nikola Tesla. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2017 [cit. 2017–07–06]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Nikola_Tesla
- [9] Teslas induction motor.jpg. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2017 [cit. 2017–07–06]. Dostupné z: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/d/dc/Tesla%27s_induction_motor.jpg/1024px-Tesla%27s_induction_motor.jpg
- [10] Tr2.gif. In: *Čez* [online]. Praha, 2017 [cit. 2017–07–06]. Dostupné z: <https://www.cez.cz/edee/content/microsites/rtg/f/tr2.gif>
- [11] 2-45.png. In: *Škola pro všechny: Inkluze jako cesta k efektivnímu vzdělávání všech žáků* [online]. Ústí nad Labem: UJEP, 2017 [cit. 2017–07–06]. Dostupné z: <http://inkluzе.ujep.cz/images/gallery/dite-nemocnici/2-45.png>
- [12] <https://www.youtube.com/watch?v=-Kk44BDNT5I>
- [13] Controlling-mechanism. In: *IPWatchdog, Inc.* [online]. 2016 [cit. 2017–07–06]. Dostupné z: <http://ipwatchdog.com/images/controlling-mechanism.png>
- [14] *6aba50d4eee0426322ca04f5d619b685.jpg* [online]. In: 2016 [cit. 2017–07–04]. Dostupné z: <https://s-media-cache-ak0.pinimg.com/originals/6a/ba/50/6aba50d4eee0426322ca04f5d619b685.jpg>
- [15] Největší vynález geniálního Tesly ztroskotál kvůli chamtivosti bankéřů. In: *Radiožurnál* [online]. Praha, 2016 [cit. 2017–07–06]. Dostupné z: http://www.rozhlas.cz/radiozurnal/zzz/_zprava/1081433
- [16] <https://www.youtube.com/watch?v=XyVyYTCO88>
- [17] *4455714901_40f368e12e_z.jpg* [online]. 2016 [cit. 2017–07–06]. Dostupné z: https://c1.staticflickr.com/5/4071/4455714901_40f368e12e_z.jpg
- [18] Rayo_globular.preview. In: *Youbioit.com* [online]. 2014 [cit. 2017–07–06]. Dostupné z: https://www.youbioit.com/files/newimages/2/272/rayo_globular.preview.jpg

UŽITÍ FALEŠNÉHO PŘEDPOKLADU (REGULA FALSI) V HISTORII A DNES

Jiří Příbyl

1 ÚVOD

Jedním ze základních poslání výuky matematiky je naučit žáky řešit různé úlohy a problémy. Jednou z možností úspěšného řešení úloh je použití heuristické strategie v případě, že řešiteli není znám algoritmus řešení úlohy, či ho nechce použít. V historických matematických knihách a učebnicích se vyskytují dva způsoby řešení, které dnes řadíme mezi heuristické strategie, a které mají obdobný základ – obě pracují jako s klíčovým prvkem, který nazýváme *falešný předpoklad*. Jejich síla spočívá nejen v efektivním způsobu řešení určité třídy úloh, ale především v možnosti jejich využití v současné výuce matematiky jako vhodné propedeutiky řešení slovních úloh pomocí lineárních rovnic.

Tento příspěvek je stručnou verzí článku *Phenomenon of false assumption in historical and educational texts*¹, který jsme odeslali do časopisu *Science and Education*. Uvedený článek se kromě zmíněné strategie *Užití falešného předpokladu* (dále jen UFP) zabývá strategií *Dvojití užití falešného předpokladu*.

2 PŘEDSTAVENÍ STRATEGIE

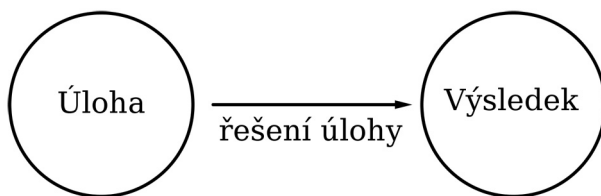
Cílem této kapitoly je představit základní ideu heuristických strategií jakožto prostředku k řešení matematických úloh. Dále tato kapitola stručně seznamuje čtenáře se strategií UFP. Oproti soudobým heuristickým strategiím je představovaná strategie poměrně silně ukotvena v historii, avšak její pojmenování se v průběhu věků měnilo. Z důvodu určité konzistence v rámci našeho dlouhodobého výzkumu [8] jsme se rozhodli pro její pojmenování tak, jak je použito v této kapitole.

2.1 HEURISTICKÉ STRATEGIE

Lze bez pochyby konstatovat, že ohnisko soudobé výuky matematiky na základních a středních školách spočívá především v rozvíjení dovedností a schopností řešit úlohy [11]. Obrázek 1 ukazuje základní situaci.

Pokud byl žákovi způsob řešení matematické úlohy v rámci výuky představen a on jej ovládá, pak hovoříme o *přímém způsobu řešení*. V některých případech

¹Autoři: Petr Eisenmann, Ján Gunčaga, Jiří Příbyl

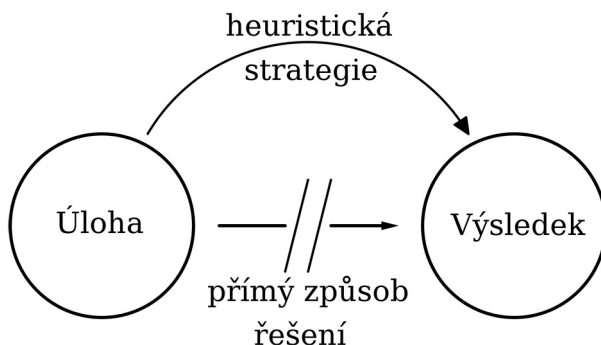


Obr. 1

je však proces řešení úlohy „přerušen“ a žák není schopen danou úlohu vyřešit přímo. Mezi obvyklé příčiny tohoto přerušení patří:

- Žák dosud nebyl s daným způsobem řešení seznámen. Např. se jedná o úlohu z matematické olympiády, z testování, nebo o úlohu, která nebyla žákovi předložena v rámci výuky.
- Úloha je postavena na použití znalosti, se kterou se žák už setkal – byla mu v rámci výuky matematiky již předložena, avšak nemá ji dosud ukotvenou ve své poznatkové struktuře a tedy není schopen ji s úspěchem použít.
- Žák znalost potřebnou k vyřešení úlohy má, ale chybí mu prostředky k jejímu použití.

Ve svém dlouhodobém výzkumu se zabýváme problematikou, jak pomoci žákovi, který se do dané situace dostal. Jednou z možností je užití heuristické strategie. Systematicky bylo jeho použití při řešení matematických úloh zpracováno Georgem Pólyou ve čtyřicátých letech minulého století [13]. Celý proces je znázorněn na obrázku 2.



Obr. 2

Idea heuristického přístupu je pak dlouhodobě zpracovávána nejen předními didaktiky matematiky [16, 19, 20] ale i psychology [17] a matematiky samotnými [18].

2.2 ÚLOHA FRANCESE PELLOSE A JEJÍ ŘEŠENÍ

Použití popisované heuristické strategie budeme demonstrovat na následující historické úloze, kterou v 15. století předložil francouzský šlechtic z Nice – Frances Pello (v textu se budeme na úlohu odkazovat jako na úlohu FP).

Zadání: Polovina a třetina kopí je pod vodou, přičemž nad vodou je ještě devět dlani. Ptám se tě, jak dlouhé je kopí.² [9, str. 83]

Řešení soudobými prostředky je poměrně snadné a přímočaré.

Označme si délku kopí jako neznámou x . Potom můžeme zadání úlohy symbolicky přepsat následovně:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + 9 = x.$$

Po snadné úpravě získáváme

$$9 - \frac{1}{6}x = 0. \quad (1)$$

Řešením této rovnice pak je rovnost

$$x = 54.$$

Tento způsob řešení je přístupný žákům ve věku 13–15 let, kdy se v rámci výuky obvykle seznámí s řešením lineárních rovnic. Nejčastějším úskalím tohoto algebraického způsobu řešení je sestavení příslušné rovnice.

V následující podkapitole představíme strategii UFP a ukážeme, jak úlohu FP pomocí ní vyřešit.

2.3 STRATEGIE UFP

Strategii UFP řadíme mezi tzv. experimentální heuristické strategie [8]. Základní podstatou experimentálních strategií je, že řešitel v rámci procesu řešení provádí jeden, nebo i více experimentů, které vyhodnotí a se kterými nadále pracuje. Jejich principem je, že po několika iteracích se řešitel dobře k požadovanému cíli. Mezi experimentálními strategiemi, zaujímá strategie UFP význačné postavení ve dvou směrech:

1. V procesu řešení provádíme pouze jeden experiment a na jeho základě jsme schopni se dobrat řešení. Tato skutečnost, jak bude ukázáno v kapitole 2, je vykoupena tím, že danou strategii můžeme použít pouze u určitého typu úloh.

²A lance has a half and a third in the water and 9 palms outside. I ask you how long is it?

2. Samotný experiment je prováděn tak, že na začátku volíme hodnotu, se kterou nadále pracujeme. Na rozdíl od ostatních strategií však nevolíme náš předpoklad s úmyslem dostat se co nejbližší k cíli, ale nahodile. Protože s nesprávně zvoleným předpokladem se dále s úspěchem pracuje, nazýváme tuto metodu právě *Užití falešného (nesprávného) předpokladu*.

Chod strategie UFP je následující:

- (a) provedeme experiment,
- (b) zjistíme, jak moc jsme se zmýlili,
- (c) provedeme korekci.

Demonstrujme si chod strategie při řešení úlohy FP.

Ad (a) Předpokládejme, že délka kopí je 24 dlaní. O našem předpokladu nemůžeme říci, že je správný, nemáme pro to v tuto chvíli dostatek informací. Předpokládejme, že je nesprávný. Se stejným úspěchem bychom mohli zvolit i jiné falešné předpoklady. Délka daného kopí by například mohla být volena jako jedna dlaň, nebo naopak 1 000 dlaní. Jak na proces řešení pomocí strategie UFP, tak na výsledek, nemají tyto volby žádný vliv.

S námi zvoleným falešným předpokladem provedeme jednotlivé aritmetické úkony tak, jak je požaduje zadání úlohy.

Pod vodou je jedna polovina kopí (12 dlaní) a jedna třetina kopí (8 dlaní). Celkem je tedy pod vodou 20 dlaní kopí a nad hladinou jsou čtyři dlaně.

Ad (b) Nad hladinou má ale být devět dlaní. **Jak moc (kolikrát) jsme se zmýlili?**

Shrňme do tabulky 1, co víme:

Tabulka 1: Schéma údajů z úlohy

	délka kopí	nad vodou
Skutečná	???	9
Náš odhad	24	4

Pokud zjistíme, že náš odhad byl správný, pak již máme požadované řešení úlohy a dále již nepokračujeme.

Ad (c) Nyní provedeme korekci.

Pomocí trojčlenky snadno určíme, že

$$??? = \frac{24 \cdot 9}{4} = 54.$$

Dospěli jsme ke správnému výsledku, že skutečná délka kopí je 54 dlaní. Necháváme laskavému čtenáři na ověření, že ke stejnému výsledku dojde i s jiným falešným předpokladem.

3 MATEMATICKÉ POZADÍ STRATEGIÍ

V začátku podkapitoly 2.3 bylo napsáno, že námi předkládaná heuristická strategie není universální, avšak že funguje pouze u určitého typu úloh. Podívejme se nyní, jak tyto úlohy vypadají.

3.1 POPIS ÚLOH ŘEŠITELNÝCH STRATEGIÍ UFP

Jedná se o úlohy, kde vstupní a výstupní proměnné jsou lineárně závislé. V pozadí námi prezentované strategie je totiž lineární funkce. Z historického kontextu bude zřejmé, že tyto strategie byly již matematikům známy dříve, než byla dokončena algebraizace procesu řešení úloh – zavedení algebraické symboliky do řešení úloh rovnicemi. Z toho také vyplývá, že na řešitele klademe určité nároky – musí zvládat trojčlenku, přímou úměrnost a aritmetické operace s racionálními čísly.

Je obvyklé, že zadání úlohy obsahuje pokyn, co máme získat a dále údaje se kterými pracujeme. Prvně zmíněné nechť jsou výstupní (požadované) údaje a druhé zmíněné nechť jsou vstupní (dané) údaje. Samotný proces řešení pak můžeme charakterizovat jako transformaci vstupních údajů na výstupní.

V případě námi popisované třídy úloh si povšimněme skutečnosti, že vstupní údaje jsou dvojího typu a to manipulativní a absolutní (číselně, pevně dané). Tím je také dána struktura úlohy.

Zadání úlohy musí mít dvě části:

- Obsahuje část, která popisuje manipulaci s neznámou, přičemž tato manipulace má charakter lineární funkce.
- Obsahuje část, která popisuje výsledek této manipulace.

Proveďme nyní rozbor úlohy FP problem. V rámci tohoto rozboru si ujasníme jednotlivé entity, které potom zúročíme při matematickém popisu strategie jako takové.

Výstupní (požadovaný) údaj je délka kopí.

Vstupní údaje jsou: délka části kopí pod vodou (součtem poměrů) a délka části kopí nad vodou (číselnou hodnotou).

V rámci úlohy FP je zřejmé, že právě poměrové údaje ve spojení s celkovou délkou kopí určují lineární funkci proměnné x .

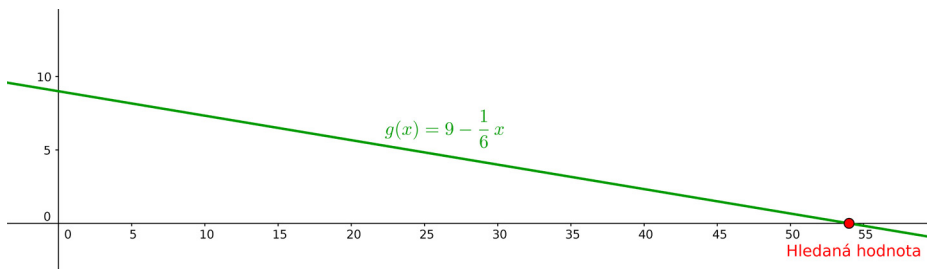
$$g(x) = \frac{1}{6}x$$

Pro nalezení řešení řešíme rovnici

$$g(x) = 0,$$

která koresponduje s rovnicí 1 na straně 85.

Obrazek 3 ukazuje vztah funkce a hledaného řešení úlohy.



Obr. 3

3.2 STRATEGIE UFP

Tato podkapitola si klade za cíl ukázat, že pro danou třídu úloh, je strategie UFP vhodnou volbou možného způsobu řešení.

Pro snadnější sledování úvah vyjděme z námi diskutované úlohy FP.

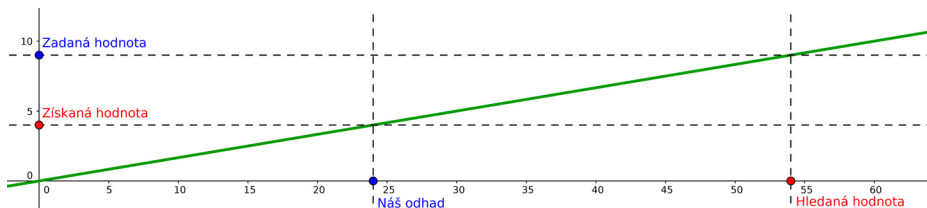
Jak bylo ukázáno v podkapitole 3.1, zadání úlohy musí splňovat dvě podmínky.

Funkce, která popisuje manipulaci s proměnnou, má tento tvar: Nechť x označuje délku kopí

$$f(x) = x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x = \frac{1}{6}x.$$

Funkční hodnota této funkce je 9.

Řešíme tedy úlohu: Určete, pro které x je $f(x) = 9$. Na obrázku 4 je znázorněná funkce, známé údaje (modře) a získané údaje (červeně).



Obr. 4

Z průběhu funkce (viz obr. 4) je zřejmé, že na volbě odhadu opravdu nezáleží. Pomocí trojčlenky jsme vždy schopni provést požadovanou korekci.

Strategie UFA ve své základní podobě se tedy dá užít u úloh, ve kterých vztah mezi vstupními a výstupními proměnnými úlohy je přímo úměrný.

4 STRATEGIE UFP V HISTORICKÝCH TEXTECH

Základním cílem této kapitoly je podat přehled o výskytu strategie UFP v různých matematických i edukačních textech, které jsou mi známy. Tento přehled rozhodně není úplný ať už z toho důvodu, že některé texty mi sice známy jsou, avšak jejich dostupnost je lokálně fyzicky omezená, anebo se jedná o texty, které jsou psány v jiných jazycích, než kterými vládnu.

Každopádně i ta část, kterou prezentuji, ukazuje, že strategie hrála nezanedbatelnou roli ve vzdělávání. Domnívám se, že právě silným tlakem na algebraizaci ve vyučování matematice došlo k ústupu v nasazování této strategie ve výuce při řešení úloh. Náš soudobý výzkum ukázal³, že má význam se k tomuto způsobu řešení vracet, neboť se ukazuje, že jsou vhodnou propedeutikou matematizace slovních úloh a zavádění řešení úloh pomocí rovnic.

4.1 NÁZVY STRATEGIÍ UFA A UDFA V PRŮBĚHU VĚKŮ

Vzhledem k velkému časovému období, které společně sledujeme, je celkem přirozené, že se měnily názvy námi sledované heuristické strategie UFP. Pro určitou jednotnost textu se na ně všude odvoláváme jako na strategii Užití falešného předpokladu a to nezávisle na tom, o jaké literatuře se právě zmiňuji a pod jakým názvem vystupuje právě tam. Cílem této podkapitoly je však ukázat určitou rozmanitost, která se objevuje právě ve spojení s názvy kapitol.

Fibonacci v Liber Abbaci používá pro řešení celé řady úloh tuto strategii. Protože je tato práce psána latinsky, také název strategie je v tomto jazyce. Pro strategii UFP používá označení *regula falsi*.

Bhaskara v Lítavátí užívá dle [2] označení *Ishta-karman*, dle [5] označení *Ishta-carman*. Každopádně oba překladatelé tyto překládají jako *operaci s předpokládanými čísly*.

Základní označení strategií v učebních textech je souhrnné a daná problematika se zde vyskytuje pod názvem *Position*, přičemž pro strategii UFP se užívá *Single Position*. Slovo *pozice* má za cíl zdůraznit základní charakter dané strategie: Hledané číslo je někde na reálné ose, avšak jeho polohu neznáme, a my si „típneme“, kde by mohlo být. Při řešení danou strategií se pak využije poměrů s obvyklým výpočtem pomocí trojčlenky.

Velmi obdobné označení můžeme najít u Keitha [12], který hovoří o *Single Supposition*.

4.2 NEJSTARŠÍ MATEMATICKÉ TEXTY

Tato kapitola podává velmi stručný přehled nejstarších zjištěných vybraných děl, ve kterých můžeme najít užití strategie UFP. Předkládaný seznam by byl výrazně delší, kdybychom uvedli veškerá matematická díla, která jsou mi známa.

³Viz na začátku zmiňovaný článek.

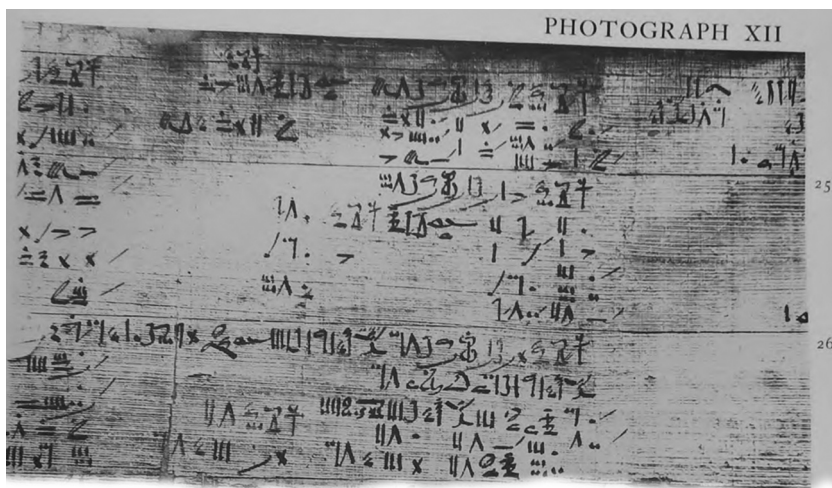
Navíc si uvědomuji, že řada významných prací je mi neznáma ať už z důvodu jazykové bariéry nebo fyzické nedostupnosti.

Tuto kapitolu nemůžeme nezačít nejstarším dochovaným záznamem o použití strategie UFP.

4.2.1 RHINDŮV (MATEMATICKÝ) PAPYRUS

První úloha, která se týká strategie UFP, je úloha označená číslem 24.

Zadání: Množství a jeho sedmina dána dohromady tvoří 19. O jaké množství se jedná?⁴



Obr. 5: Fotografie Rhindova papyru, úlohy 24–26. Převzato z [10, str. 27]

Nyní ukáži stručné řešení této úlohy pomocí strategie UFP. Podrobný zápis řešení můžeme najít v [6, str. 30–32], transkripci z papyru pak v [10, str. 141–142].

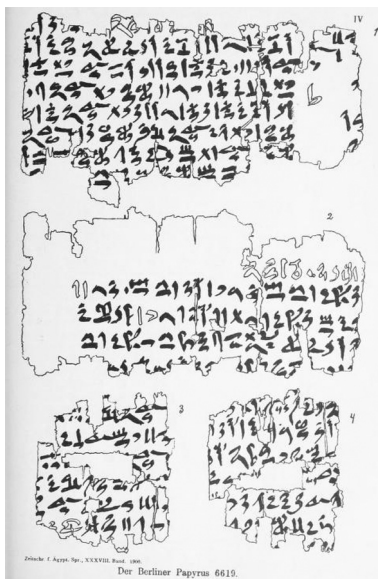
Předpokládejme, že hledané množství je 7. Podle zadání, k hledanému množství přičteme jednu sedminu, což je 1. Tedy výsledkem je hodnota 8, ale má být 19. Kolikrát musím zvětšit volbu, abychom získali 19? Číslo 7 musíme vynásobit zlomkem $\frac{19}{8}$ a hledané číslo potom je $\frac{7 \cdot 19}{8} = \frac{165}{8}$.

Ve Rhindově papyru je několik úloh, kde v pozadí je lineární rovnice a kde je možné s úspěchem použít strategii UFP k řešení úloh. Konkrétně se jedná o úlohy 21 až 38.

⁴ „A quantity and its seventh, added together, give 19. What is the quantity?“ Zadání je převzato z [6, str. 30].

4.2.2 BERLÍNSKÝ PAPYRUS 6619

Berlínský papyrus s označením 6619 je jediným mně známým dílem, ve kterém se řeší nelineární úloha pomocí strategie UFP. Tato skutečnost není dána charakterem úlohy, ale tím, že během řešení získáme lineární závislost, kde už s úspěchem je použita strategie UFA. Obrázek 6 ukazuje reprodukci tohoto papýru, jak ji sestavil Schack-Schackenburg.



Obr. 6: Berlínský papyrus podle Schack-Schackenburga. Převzato z [15, tabule IV, mezi stranami 138–139]

Znění úlohy a její řešení přebírám z [6, str. 32]

Zadání: Součet ploch dvou čtverců je 100. Trojnásobek strany prvního čtverce je čtyřnásobkem strany druhého čtverce. Najděte strany čtverců.⁵

Zapišeme-li to moderním způsobem, získáváme následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 100 \\ 3x &= 4y\end{aligned}$$

Nyní ukáží egyptský způsob řešení, avšak pro snadnější sledování výpočtu ho zapíši v moderní notaci.

⁵„The sum of the areas of two squares is 100. Three times the side of one is four times the side of the other. Find the sides of the squares.“

1. Nechť $x = 4$, potom $y = 3$.
2. Potom $4^2 + 3^2 = 25$. Protože $25 \neq 100$ pokračuj krokem 3.
3. $\sqrt{25} = 5$ a $\sqrt{100} = 10$.
4. $10 : 5 = 2$
5. Strany jsou tedy $2 \cdot 4 = 8$ a $2 \cdot 3 = 6$.

4.2.3 ZAJÍMAVÁ DÍLA

Cílem tohoto příspěvku není podat ucelený přehled o dílech, ve kterých autoři užívají strategií UFP k řešení úloh. Proto následující tři vybraná díla uvádíme ve zkrácené podobě.

- Fibonacciho *Liber Abbaci* – neměl jsme možnost pracovat přímo s pramenem a tak vycházím především z [3] a [14]. Strategii UFA je v *Liber Abbaci* věnována celá kapitola 12.
- Bháskarácháryyaova (Bháskarácháryya někdy Bháskara) *Lálávati* – neměl jsme možnost pracovat přímo s pramenem a tak vycházím především z [5] a [2]. Strategie UFP se ve zdroji nachází v kapitole III Různá pravidla (*Miscellaneous Rules*), sekci II Předpoklady (*Suppositions*). Pro nás zajímavý je způsob řešení, neboť v pozadí je sice trojčlenka, ale vůbec se nezmiňuje, jako kdyby řešitel neměl být s tímto pojmem seznámen. Řešení probíhá tak, že je nejprve proveden rozbor úlohy vůči známým operacím, pak jsou provedeny jednotlivé výpočty a nakonec je udělána korekce. Jako příklad uvádím ilustrující úlohu z [2, str. 26].

51. Example. What is that number, which multiplied by five, and having the third part of the product subtracted, and the remainder divided by ten, and one-third, a half and a quarter of the original quantity added, gives two less than seventy ?

Statement: Multiplier 5. Subtractive $\frac{1}{3}$ of itself. Divisor 10. Additive $\frac{1}{3} \frac{1}{2} \frac{1}{4}$ of the quantity. Given 68.

Putting 3; this multiplied by 5 is 15; less its third part, is 10; divided by 10, yields 1. Added to the third, half and quarter of the assumed number 3, viz., $\frac{3}{3} \frac{3}{2} \frac{3}{4}$, the sum is $\frac{17}{4}$. By this divide the given number 68 taken into the assumed one 3; the quotient is 48.

The answer is the same with any other assumed number, as 1, &c.

- Christophora Clavia *Epitome Arithmeticae Practicae nunc denuo ab ipso auctore recognita*. Dílo je z roku 1585 a je psáno latinsky. Pro nás zajímavou skutečností je fakt, že využívá strategii UFA při řešení soustavy lineárních rovnic.

V tuto chvíli si dovolím ukončit daný výčet. Je neúplný, avšak mým cílem je ukázat námi sledované strategie i v učebnicích. Jak už bylo zmíněno v úvodu této podkapitoly, pokud bychom uvedli nám známá díla matematiků z různých období (např. Benjamin Banneker, Girolamo Cardano, Bartholomaeus Pitiscus, ...), příspěvek by byl dozajista zajímavější, ale také neúměrně dlouhý.

4.3 UČEBNICE A PŘÍRUČKY PRO UČITELE

Struktura této podkapitoly je následující. Vždy uvedeme název knihy, ze které čerpám a její vrocení. Dále pak se zaměřím na vymezení strategie UFP v daném zdroji a popř. poukážu na odlišnosti, kterými se dané vymezení odlišuje od našeho. V některých případech ukážeme i zajímavou úlohu či způsob užití některé ze strategií.

4.3.1 THE SCHOOLMASTER'S ASSISTANT, BEING A COMPENDIUM OF ARITHMETIC, BOTH PRACTICAL AND THEORETICAL IN FIVE PARTS

Autorem je Thomas Dilworth a k dispozici jsem měl vydání z roku 1825. Součástí knihy je i vyjádření Mosese Browna a Williama Deana, přičemž druhé je datováno Oct. 20, 1765. Lze dohledat, že první vydání je z roku 1743.

Specifikem této příručky je, že po nadpisu kapitoly následuje série otázek a odpovědí, které měly (patrně) vyučujícímu usnadnit reagovat na jednotlivé dotazy od žáků.

Sledovaná problematika se nachází na stranách 102–104, která je celá věnovaná části O pozicích (*Of position*). V této práci se tedy hovoří o pozicích nebo o obrácené⁶ aritmetice (*negative arithmetic*) a strategie UFP je nazývána *single position*.

Zavedení strategie je provedeno pomocí otázek a odpovědí, tzn. není zde samostatná pasáž, která by nějakým způsobem blíže specifikovala danou podstatu strategie, přičemž chybějí ilustrující příklady a není explicitně (tj. graficky) uveden vzorec pro výpočet. Ten je vždy schován v popisu a neexistence jeho grafické podoby může být přičítána knihtiskařským možnostem dané doby. Za povšimnutí stojí poslední otázka a odpověď v části věnované strategii UFP, které představují kontrolu (ověření) správnosti výpočtu. V závěru kapitoly jsou potom uvedeny úlohy s výsledky.

⁶Najít vhodný překlad výrazu *negative arithmetic* bylo poměrně obtížné. V tuto chvíli se kloním k sousloví *obrácená aritmetika*, neboť alespoň do určité míry vystihuje mnou nalezený popis.

OF POSITION.

Q. WHAT is Position; or Negative Arithmetic?
A. It discovers the Truth by supposed Numbers.

Q. How many Kinds of Position are there?

A. Two; Single and Double.

OF SINGLE POSITION.

Q. What is Single Position?

A. It discovers the truth by only one supposed number.

Q. How is that supposed number used?

A. By working with it, as if it was the true number, in the same proportion as the question directs; and if the result be either too much or too little, the true number may be found out by the following Rule, viz.

As the Result of the Position,

Is to the Position ::

So is the given Number,

To the number required.

Q. How do you prove Position?

A. Position, both Single and Double, is proved by adding the several sums required, or the several parts of the sum required, together; and if that sum agrees with the given sum, it is right.

Obr. 8: Úvodní partie kapitoly [7, str. 102]

4.3.2 THE SCHOLAR'S ARITHMETIC; OR FEDERAL ACCOUNTANT: ...

Autorem je Daniels Adams a k dispozici jsem měl vydání z roku 1824, přičemž autor v předmluvě z roku 1815 hovoří o tom, že již uplynulo 14 let od prvního vydání. Lze tedy předpokládat, že původní vnočení je 1801.

Sledovaná problematika se nachází ve třetí kapitole – Užitečná pravidla pro zaměstnané lidi (*Rules occcationally useful to men in particular employments of life*), jako její § 10. Pozice.

Daný paragraf je veden tak, že je nejprve představena daná strategie, pak je uveden příklad, na kterém je ukázáno, jak daná strategie funguje a následuje několik úloh. Zajímavým specifikem je, že u každé úlohy je vynecháno místo, kam čtenář / řešitel může psát své řešení. Dnes bychom tuto část nazvali pracovním listem.

Sledovaná problematika je na stranách 198–200, kde se daný paragraf nachází. Na jedné straně (198) je představena strategie UFA, je uveden příklad a také je zde místo pro čtyři úlohy s prostorem pro řešitele.

Adams vymezuje pozici následovně: Pozice je pravidlo, ve kterém nesprávné nebo předpokládané, náhodně zvolené číslo objeví požadované správné číslo.⁷

V této učebnici se objevila zajímavá skutečnost. Některé úlohy jsou převzaty z dřívější učebnice, alespoň se domnívám, že takové bylo pořadí. Konkrétně následující úloha se vyskytuje jak v [7] tak i [1].

⁷Position is a rule which by false or supposed numbers, taken at pleasure, discovers the true one required. [1, str. 198]

SINGLE POSITION.

Is the working of one supposed number, as if it were the true one, to find the true number.

RULE.

1. Take any number and perform the same operations with it as are described to be performed in the question.

2. Then say as the sum of the errors is to the given sum, so is the supposed number to the true one required.

Proof. Add the several parts of the sum together, and if it agree with the sum, it is right.

Obr. 9: Úvodní partie § 10 [1, str. 198]

Zadání: Dva muži A a B našli tašku s penězi a přeli se, komu by měla patřit. A řekl: „Polovina, třetina a čtvrtina peněz dělá 130 dolarů a jestliže B řekne kolik je v tašce, může si všechno nechat. V opačném případě nedostane nic.“ Řekni mi, kolik peněz bylo v tašce.⁸

Řešení, které předkládá sám autor, je ukázáno na obrázku 10.

<i>Suppose 60 dollars.</i>	OPERATION. <i>As 65 : 130 :: 60</i>
$ \begin{array}{r} \text{The half} \quad 30 \\ - \text{third} \quad 20 \\ - \text{fourth} \quad 15 \\ \hline 65 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 60 \\ 65 \overline{) 7800} (120 \text{ dolls. the answer.} \\ \underline{65} \\ 130 \\ \underline{130} \\ 000 \end{array} $

Obr. 10: Řešení úlohy [1, str. 198]

Vysvětleme si, co přesně znamená každý ze sloupců.

První sloupec je tvořen odhadem, že v pytlí bylo 60 dolarů a výpočtem jednotlivých částí: jednu polovinu tvoří 30 dolarů, jednu třetinu 20 dolarů a jednu čtvrtinu 15 dolarů. Součtem pak získáme 65 dolarů.

Druhý sloupec je záznamem dynamického procesu a nelze jej nahlížet jako na jednorázově vytvořený text. První řádek je původním znázorněním trojčlenky.

Zápis $65 : 130 :: 60$ znamená $\frac{65}{130} = \frac{60}{\text{odpověď}}$. Vnitřní část je potom zrychleným zápisem násobení. Provede se první část požadovaného výpočtu, přičemž uspořádání našeho zápisu odpovídá dnešní konvenci, tj. zarovnáváme vpravo.

$$\begin{array}{r}
 130 \\
 60 \\
 \hline
 7800
 \end{array}$$

⁸Two men, A and B, having found a bag of money, disputed who should have it. A said the half, third, and one fourth of money made 130 dollars, and if B could tell how much was in it, he should have it all, otherwise he should have nothing; I demand how much was in the bag!

Dále se pracuje s číslem 7 800 a připiše se číselná hodnota před něj a za něj podle následujícího schématu:

dělitel) dělenec (podíl

V našem případě zápis 65)7800(120 říká, že

$$7\,800 : 65 = 120.$$

Znovu upozorňuji na skutečnost, že zápis v obrázku 10 zaznamenává postupný výpočet, tj. kolikrát se vejde 65 do 78? Jednou a zbytek je 13. Sepíšeme nulu a takto pokračujeme dále. Slovo „the answer“ je vždy připsáno až po dokončení všech příslušných výpočtů.

4.3.3 BONNYCASTLE'S SCHOLAR'S GUIDE TO ARITHMETIC; OR, ...

Autorem je John Bonycastle a k dispozici jsme měli 18. vydání s opravami a dodatky. Původní vydání *The Scholar's guide...* je datováno rokem 1780. John Bonycastle je také autorem monografie *An Introduction to algebra ; with notes and observations*, kterou vydal v roce 1782 a právě jeho znalosti algebry a cit pro korektnost učinily jeho učebnici dlouhodobě použitelnou. Ve své práci již běžně používá proměnné a neznámé a pro nás je zajímavá ta skutečnost, že přestože znal řešení rovnic, uvádí i námi sledovanou strategii UFP jako nástroj řešení úloh.

Ve své práci používá Bonycastle označení pro námi sledované strategie název pozice a daná pasáž tvoří samostatnou kapitolu. Obrázek 11 ukazuje vymezení strategie UFP a z našeho pohledu to, co je důležité pro matematiku jako takovou, také její zdůvodnění.

Povšimněme si poslední věty na obrázku 11. „So that ... be applied.“ Autor si je zcela vědom omezení, která použití strategie UFP limitují.

Právě korektnost, se kterou autor přistoupil k vymezení jednotlivých strategií, je to, čím se daná učebnice odlišuje od výše zmíněných.

Kapitola věnovaná strategii UFP obsahuje jeden řešený příklad a dalších 7 úloh.

Tímto způsobem bychom mohli pokračovat dále. V pozdějších učebnicích se objevují nové prvky, avšak pravdou je, že v řadě případů dochází k přebírání úloh i příkladů a v některých případech i vymezení.

5 ZÁVĚR

Cílem této kapitoly bylo ukázat jednu heuristickou strategii v historickém kontextu. Za sjednotitele heuristických strategií bývá považován George Pólya, přičemž právě jeho práce [13] byla dlouho chápána jako vhodná příručka pro matematické olympioniky.

RULE.*

1. Take any number, and perform the same operations with it as would be required by the question to be performed by the true one.

2. Then say, As the result of this operation is to the number made use of, so is the result mentioned in the question to the number required.

EXAMPLES.

(1.) A's age is double of B's, and B's is triple of C's, and the sum of all their ages is 140: what is each person's age?

* The reason of the method of resolving the kind of questions here mentioned, is founded upon the principle given in the rule, that the results are proportional to the suppositions; which is too obvious to require any formal demonstration.

$$\text{For } nx : x :: na : a; \text{ or } \frac{x}{n} : x :: \frac{a}{n} : a.$$

$$\text{And } \frac{x}{n} + \frac{x}{m} \&c. : x :: \frac{a}{n} + \frac{a}{m} \&c. : a; \text{ and so on.}$$

So that when the question involves the square or any higher power of the unknown quantity, this method of assumption cannot be applied.

Obr. 11: Zavedení strategie UFP [4, str. 211]

Mnou představený způsob řešení je ovšem starší než veškeré matematické soutěže a jak je z výše uvedeného zřejmé, tvořil nedílnou součást vzdělávání matematice a to i v době, když již byl znám způsob řešení pomocí rovnic. Domníváme se, že opětovné zavedení této strategie do výuky může pomoci žákům v oblasti, která jim činí obtíží a to při sestavování rovnic při řešení slovních úloh.

PODĚKOVÁNÍ

Tento příspěvek by nikdy nevznikl bez pomoci jiných. V první řadě děkuji svému kolegovi Petrovi Eisenmannovi, který se nezanedbatelnou měrou podílel na vzniku tohoto článku a je spoluautorem v úvodu zmíněného posuzovaného článku. Dále děkuji Magdaleně Krátké, že mi umožnila podělit se o výsledky mé činnosti na Letní škole matematiky a fyziky 2017. Též děkuji GA ČR, která projektem P407/12/1939 podpořila moji práci.

LITERATURA

- [1] ADAMS, D.: *The Scholar's Arithmetic; or, Federal Accountant*. New York: Keene, N.H., 1824.

- [2] BHÁSKARÁCHÁRYYA: *Līlāvati*. Engl. transl. by H. T. Colebrooke with notes by H. Ch. Banerji. Allahabad: Kitab Mahal, 1967.
- [3] BONCOMPAGNI, B.: *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo: Volume I*. Roma: Tipografia delle scienze matematiche e fisiche, 1857.
- [4] BONNYCASTLE, J., ROWBOTHAM, J., MAYNARD, S.: : Bonnycastle's Scholar's Guide to Arithmetic; or, A Complete Exercise Book for the Use of Schools. London: Longman and Co., 1851.
- [5] BRAHMEGUPTA, B.: *Algebra, with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit*. Engl. transl. By H. T. Colebrooke. London: John Murray, 1817.
- [6] BUNT, L. M. H., JONES, P. S., BEDIANT, J. D.: *The historical roots of elementary mathematics*. New York: Dover Publications, Inc., 1978.
- [7] DILWORTH, T.: The schoolmaster's assistant, being a compendium of arithmetic, both practical and theoretical in five parts. New York: J. F. Sibell, 1825.
- [8] EISENMANN, P., NOVOTNÁ, J., PŘIBYL, J., BŘEHOVSKÝ, J.: The development of a culture of problem solving with secondary students through heuristic strategies. *Mathematics Education Research Journal*, 27, 535–562. 2015. doi: 10.1007/s13394-015-0150-2
- [9] CHABERT, J.-L.: *A History of Algorithms: From the Pebble to the Microchip*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1999.
- [10] CHACE, A. B., BULL, L., MANNING, H. P.: *The Rhind Mathematical Papyrus: British Museum 10057 and 10058: Photographic facsimile, hieroglyphic transcription, transliteration, literal translation, free translation, mathematical commentary, and bibliography in Two Volumes*. Oberlin: Mathematical Association of Mathematica, 1929.
- [11] JEŘÁBEK, J., LISNEROVÁ, R., SMEJKALOVÁ, A., TUPÝ, J.: *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání: (verze platná od 1. 9. 2013) úplné znění upraveného RVP ZV*. Praha: MŠMT, 2015.
- [12] KEITH, T.: *The Complete Practical Arithmetician: Containing Several New and Useful Improvements Adapted to the Use of Schools and Private Tuition*. London: G. & W. B. Whittaker, 1822.
- [13] PÓLYA, G.: *How to solve it: a new aspect of mathematical method (Expanded Princeton Science Library ed.)*. Princeton: Princeton University Press, 2004.

- [14] SIGLER, L. E.: *Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. New York: Springer-Verlag, 2003.
- [15] SCHACK-SCHACKENBURG, H.: Der Berliner Papyrus 6619. *Zeitschrift für Ägyptische sprache und altertumskunde*, XXXVIII, 135–140. 1900.
- [16] SCHOENFELD, A. H.: *Mathematical problem solving*. London: Academic Press Inc., 1985.
- [17] STERNBERG, R. J., BEN-ZEEV, T.: *The Nature of Mathematical Thinking*. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., 1996.
- [18] TAO, T.: *Solving Mathematical Problems: A Personal Perspective*. Oxford: Oxford University Press, 2006.
- [19] WICKELGREN, W. A.: *How to Solve Mathematical Problems*. New York: Dover Publications Inc., 1974.
- [20] ZEITZ, P.: *The Art of Problem Solving*. Hoboken: John Wiley & Sons Inc., 2007.

ZAJÍMAVÉ NEROVNOSTI

Hana Turčinová, Zuzka Vlasáková

V následujícím textu se budeme zabývat několika základními nerovnostmi a jejich využitím při řešení složitějších úloh – konkrétně máme na mysli úlohy typu „Dokažte, že platí následující nerovnost a určete, kdy nastane rovnost.“. S nimi se můžeme hojně setkat v matematických soutěžích jako je např. Matematická olympiáda nebo Matematický korespondenční seminář. Doufáme, že by tento text mohl pomoci začínajícím řešitelům, kteří s nerovnostmi ještě nemají příliš zkušeností.

Jako první se podíváme na jednoduchý „příklad na zahřátí“:

Úloha 1 (61. ročník MO C KK) Pro libovolná reálná čísla x, y, z taková, že $x < y < z$, dokažte nerovnost

$$x^2 - y^2 + z^2 > (x - y + z)^2.$$

Vidíme, že v některých případech nepotřebujeme žádné další znalosti, a pouhou vhodnou úpravou, rozložením na součin či použitím známého vzorce již získáme řešení. Ve složitějších případech se už ale jen na pouhé úpravy nemůžeme spoléhat, a hodí se mít některé známé nerovnosti v záloze. Začneme jednoduchou, ale velmi účinnou nerovností:

Věta 1 (Nejkrásnější nerovnost) *Nechť $x \in \mathbb{R}$, pak platí*

$$x^2 \geq 0$$

a rovnost nastává $\Leftrightarrow x = 0$.

To, že tato nerovnost platí, nikoho nepřekvapuje, v čem ale tkví její síla? Podívejme se např. na následující nerovnost: $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x \geq -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Vypadá složitě, pokud ji ovšem přepíšeme do jednoduchého tvaru $(x^2 - 3x + 1)^2 \geq 0$, máme jasno. Získáváme tedy první metodu řešení nerovností – snažíme se výraz v nerovnosti převést na čtverec. Důležitost této nerovnosti také uvidíme v dalších dvou příkladech:

Úloha 2 Dokažte, že platí

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \geq \frac{x + y}{2}$$

pro x, y nezáporná.

Řešení: Použitím *Nejkrásnější nerovnosti* pro $x - y$ a přičtením $x^2 + 2xy + y^2$ dostáváme

$$\begin{aligned}(x - y)^2 &= x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \\ 2(x^2 + y^2) &\geq x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2,\end{aligned}$$

po odmocnění a vydělení dvěma dostáváme požadovanou nerovnost:

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2} &\geq x + y \\ \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} &\geq \frac{x + y}{2}.\end{aligned}$$

Úloha 3 Dokažte, že platí

$$\sqrt{xy} \geq \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

pro x, y kladná.

Řešení: Tentokrát využijeme nezápornosti členu $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$:

$$\begin{aligned}(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 &= x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0 \\ x + y &\geq 2\sqrt{xy}.\end{aligned}$$

Po vynásobení $\frac{\sqrt{xy}}{x+y}$ dostáváme

$$\sqrt{xy} \geq \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}.$$

První nerovnost je speciálním případem tzv. *KA nerovnosti*, druhá zase *GH nerovnosti*. Na jejich zobecnění se podíváme v následující podkapitole.

KAGH NEROVNOST

Nejprve si definujeme několik důležitých pojmů.

Definice 1 *Nechť pro $n \in \mathbb{N}$ čísel $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ platí*

$$\begin{aligned}K &= \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}, \\ A &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \\ G &= \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}, \\ H &= \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}.\end{aligned}$$

Pak K nazveme kvadratickým průměrem, A aritmetickým průměrem, G geometrickým průměrem a H harmonickým průměrem čísel $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$.

S aritmetickým průměrem jsme se každý setkal již mnohokrát, ale i ostatní průměry najdou své využití. Čtenář se zájmem o kinematiku se například může zamyslet nad jednoduchou úlohou určení průměrné rychlosti auta, které jede první polovinu trasy rychlostí v_1 a druhou polovinu trasy rychlostí v_2 . Ve statistice se zase můžeme setkat s pojmem směrodatná odchylka, která zcela jasně souvisí s kvadratickým průměrem. Nás ale bude nyní zajímat porovnání těchto průměrů:

Věta 2 (KAGH nerovnost) *Nechť K , A , G a H jsou podle Definice 1, pak platí*

$$K \geq A \geq G \geq H.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Zkuste část této nerovnosti použít na následujícím příkladu:

Úloha 4 Pro $a, b, c, d > 0$ taková, že $a + b + c + d = 1$, dokažte:

$$\frac{1}{4a + 3b + c} + \frac{1}{3a + b + 4d} + \frac{1}{a + 4c + 3d} + \frac{1}{4b + 3c + d} \geq 2.$$

OBEČNÁ AG NEROVNOST

Podívejme se ještě znovu podrobněji na *AG nerovnost*, která je velmi užívaná – tentokrát si ukážeme i to, jak její platnost dokázat.

Věta 3 *Pro libovolná nezáporná čísla $x_1, \dots, x_n$, $n \in \mathbb{N}$, platí*

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}.$$

Důkaz: (Vychytralou indukcí) Důkaz provedeme matematickou indukcí podle n . Nebude to však obyčejná indukce s krokem $n \rightarrow n + 1$, nýbrž pro tento důkaz elegantnější rozklad na dva kroky $n \rightarrow 2n$ a $n \rightarrow n - 1$. Začneme s nejpoužívanějším $n = 2$.

1. $n = 2$. Využijeme *Nejkrásnější nerovnost* pro číslo $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, kde a, b jsou libovolná nezáporná čísla.

$$\begin{aligned} a - 2\sqrt{ab} + b &= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \\ \frac{a + b}{2} &\geq \sqrt{ab} \end{aligned}$$

2. $n \rightarrow 2n$. Nechť $a_1, \dots, a_{2n}$ jsou nezáporná reálná čísla, pak

$$\sqrt[2n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{2n}} = \sqrt[n]{\sqrt{a_1 \cdot a_2} \cdot \dots \cdot \sqrt{a_{2n-1} \cdot a_{2n}}}.$$

Nyní aplikujeme indukční předpoklad a nakonec již dokázanou AG nerovnost pro $n=2$

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\sqrt{a_1 \cdot a_2} \cdot \dots \cdot \sqrt{a_{2n-1} \cdot a_{2n}}} &\leq \frac{\sqrt{a_1 \cdot a_2} + \dots + \sqrt{a_{2n-1} \cdot a_{2n}}}{n} \leq \\ &\leq \frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \dots + \frac{a_{2n-1}+a_{2n}}{2}}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}}{2n}. \end{aligned}$$

3. $n \longrightarrow n-1$. Vezmeme si n nezáporných reálných čísel $a_1, \dots, a_n$, ale a_n zvolíme speciálně $a_n = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i}{n-1}$. Použijeme indukční předpoklad, že tvrzení platí pro n .

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i}{n-1}} &\leq \frac{a_1 + \dots + a_{n-1} + \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i}{n-1}}{n} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i (1 + \frac{1}{n-1})}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i \cdot \frac{n}{n-1}}{n} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i}{n-1} \end{aligned}$$

Umocněním na n , úpravou a následným odmocněním dostaneme kýžený výsledek

$$\begin{aligned} a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i}{n-1} &\leq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i}{n-1} \right)^n \\ a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1} &\leq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i}{n-1} \right)^{n-1} \\ \sqrt[n-1]{a_1 \cdot \dots \cdot a_{n-1}} &\leq \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i}{n-1}. \end{aligned}$$

Tím jsou všechny kroky hotové a *AG nerovnost* je dokázána. □

Se znalostí *AG nerovnosti* už můžeme jednoduše vyřešit následující tři příklady.

Úloha 5 (55. ročník MO B SK) Dokažte následující nerovnost $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^+$:

$$\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{1}{c}\right) \left(c + \frac{1}{a}\right) \geq 8.$$

Kdy nastane rovnost?

Řešení: Vidíme, že se v nerovnosti vyskytují tři výrazy, které jsou navzájem cyklické – jako první by nás mohlo napadnout, napsat si pro každý z nich *AG nerovnost* zvlášť.

Úloha 6 Za předpokladů $a, b, c > 0$ a $abc = 1$ dokažte:

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}.$$

Řešení: Protože známe hodnotu abc , pokusme se nerovnost upravovat tak, aby se nám v ní výraz abc vyskytoval – po využití této rovnosti už nám zbývá jen užití *AG nerovnosti*.

Úloha 7 (60. ročník MO B KK) Součin kladných reálných čísel a, b, c je 60 a jejich součet je 15. Dokažte nerovnost

$$(a+b)(a+c) \geq 60$$

a zjistěte, kdy nastane rovnost.

CAUCHYOVA-SCHWARZOVA NEROVNOST

Další nerovnost, kterou si ukážeme, je velmi užitečná. V lineární algebře při užívání skalárního součinu bychom se bez ní neobešli, ale hodí se i mnohem dříve, než se se skalárním součinem seznámíme.

Věta 4 (Cauchyova-Schwarzova nerovnost) *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ jsou reálná čísla. Pak platí*

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

Důkaz: Důkazů Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti je samozřejmě více. My se zde seznámíme s jedním pěkným trikovým.

Uvažme kvadratickou rovnici s neznámou x :

$$(a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \dots + (a_nx - b_n)^2 = 0.$$

Vidíme, že levá strana, která je součtem druhých mocnin, je opět díky *Nejkrásnější nerovnosti* nezáporná. Proto tato rovnice může mít nejvýše jeden kořen a diskriminant je tedy nekladný.

Rovnici lze zapsat též ve tvaru $Ax^2 + Bx + C = 0$ s proměnnými

$$\begin{aligned} A &= a_1^2 + \dots + a_n^2, \\ B &= -2(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n), \\ C &= b_1^2 + \dots + b_n^2. \end{aligned}$$

Potom platí, že $B^2 - 4AC \leq 0$, což lze zapsat i jako

$$\left(\frac{B}{2}\right)^2 \leq AC.$$

Dosazením za A , B a C získáme požadovanou nerovnost

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

□

Tato nerovnost je velmi silným nástrojem na řešení úloh. Podívejme se na následující dva příklady – na první pohled složité příklady můžeme s dobrou znalostí Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti a vhodnou *volbou* $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ řešit metodou „kouknu a vidím“.

Úloha 8 Pro každou trojici $a, b, c \in \mathbb{R}$ dokažte:

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2.$$

Úloha 9 Pro každou trojici $x, y, z > 0$ dokažte:

$$\sqrt{3x^2 + xy} + \sqrt{3y^2 + yz} + \sqrt{3z^2 + xz} \leq 2(x + y + z).$$

Pomocí Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti lze ale řešit i složitější příklady, například následující úlohu z celostátního kola Matematické olympiády, ve které lze tuto nerovnost použít dvakrát po sobě.

Úloha 10 (63.ročník MO A CK) Pro libovolná nezáporná reálná čísla a a b dokažte nerovnost

$$\frac{a}{\sqrt{b^2 + 1}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + 1}} \geq \frac{a + b}{\sqrt{ab + 1}}$$

a zjistěte, kdy nastane rovnost.

JENSENOVA NEROVNOST

Nyní si ukážeme nerovnost, která je obecnějším případem několika předešlých nerovností. Ač její důkaz není složitý, patří už spíše do vysokoškolské matematiky. S její pomocí lze však snadno dokazovat mnoho středoškolských nerovností. K její formulaci si ovšem opět nejdříve musíme definovat jistý matematický pojem.

Definice 2 *Nechť I je interval a nechť f je reálná funkce definovaná alespoň na I . Řekneme, že funkce f je konvexní, jestliže pro všechna $x, y \in I$ a každé $\lambda \in (0, 1)$ platí*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Pojem konvexní funkce se ve středoškolské matematice často definuje pouze intuitivně – čtenář si může zkusit nakreslit graf některé konvexní funkce a ověřit na něm, že předchozí definice opravdu s jeho intuicí souhlasí.

Věta 5 (Jensenova nerovnost) *Nechť Φ je konvexní funkce na $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ a necht' $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ jsou kladná čísla. Pak*

$$\Phi \left(\frac{\alpha_1 t_1 + \dots + \alpha_n t_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \right) \leq \frac{\alpha_1 \Phi(t_1) + \dots + \alpha_n \Phi(t_n)}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}.$$

Důkaz: Důkaz provedeme matematickou indukcí podle n .

Pro $n = 1$ je důkaz snadný, $\Phi(\frac{\alpha_1 x_1}{\alpha_1}) = \Phi(x_1)$. Zde platí přímo rovnost.

Nyní provedeme indukční krok $n \rightarrow n + 1$. Necht' $t_1, \dots, t_{n+1} \in \mathbb{R}$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ jsou kladná čísla. Pak

$$\begin{aligned} & \Phi \left(\frac{\alpha_1 t_1 + \dots + \alpha_n t_n + \alpha_{n+1} t_{n+1}}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n + \alpha_{n+1}} \right) = \\ &= \Phi \left(\frac{\alpha_1 t_1 + \dots + \alpha_n t_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n + \alpha_{n+1}} + \frac{\alpha_{n+1} t_{n+1}}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n + \alpha_{n+1}} \right) = \\ &= \Phi \left(\frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n + \alpha_{n+1}} \cdot \frac{\alpha_1 t_1 + \dots + \alpha_n t_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} + \frac{\alpha_{n+1} t_{n+1}}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n + \alpha_{n+1}} \right). \end{aligned}$$

Využijeme konvexitu funkce Φ pro $\lambda = \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n + \alpha_{n+1}}$ a dále použijeme indukční předpoklad.

$$\begin{aligned} & \Phi \left(\lambda \frac{\alpha_1 t_1 + \dots + \alpha_n t_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} + (1 - \lambda) t_{n+1} \right) \leq \\ & \leq \lambda \Phi \left(\frac{\alpha_1 t_1 + \dots + \alpha_n t_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \right) + (1 - \lambda) \Phi(t_{n+1}) \leq \\ & \leq \lambda \frac{\alpha_1 \Phi(t_1) + \dots + \alpha_n \Phi(t_n)}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} + (1 - \lambda) \Phi(t_{n+1}) = \\ & = \frac{\alpha_1 \Phi(t_1) + \dots + \alpha_{n+1} \Phi(t_{n+1})}{\alpha_1 + \dots + \alpha_{n+1}}. \end{aligned}$$

Tím je nerovnost dokázána. □

Speciálně jsme volbou $\Phi(x) = x^2$ a $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1$ dokázali obecnou *KA nerovnost* pro n kladných čísel.

Jensenova nerovnost má samozřejmě svoji obdobu i pro konkávní funkce. Nerovnost se obrací, důkaz lze provést podobně.

Důsledek *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Pak pro každé $p \in [1, \infty)$ platí*

$$|a + b|^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p).$$

Důkaz: Využijeme Jensenovu nerovnost (Věta 5) pro konvexní funkci $|\cdot|^p$. Získáme

$$\frac{|a+b|^p}{2^p} \leq \frac{|a|^p + |b|^p}{2},$$

a přenásobením číslem 2^p obdržíme dokazovanou nerovnost

$$|a+b|^p \leq 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p).$$

□

Na závěr můžeme využít konkavity funkce $\sin x$ na intervalu $(0, \pi)$ k řešení následujícího příkladu:

Úloha 11 Jsou-li α, β, γ velikosti úhlů v trojúhelníku, dokažte

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

LITERATURA

- [1] ROLÍNEK, M., ŠALOM, P.: *Zdolávání nerovností*. Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně, Přírodovědecká fakulta, 2012.
- [2] 61. ročník MO – Úlohy krajského kola kategorie C. *Matematická olympiáda* [online] (cit. 11. 11. 2017). Dostupné z <http://www.matematickaolympiada.cz/media/440801/C61ii.pdf>
- [3] 60. ročník MO – Úlohy krajského kola kategorie B. *Matematická olympiáda* [online] (cit. 11. 11. 2017). Dostupné z <http://www.matematickaolympiada.cz/media/440780/B60ii.pdf>
- [4] 63. ročník MO – III. kolo kategorie B. *Matematická olympiáda* [online] (cit. 11. 11. 2017). Dostupné z <http://www.matematickaolympiada.cz/media/924674/a63iii.pdf>.
- [5] NEKVINDA, A.: *Matematická indukce*. Dostupné z <http://physics.ujep.cz/~jmaly/mo/indukce.pdf>
- [6] PICK, L., KUFNER, A., JOHN, O., FUČÍK, S.: *Function Spaces*, vol. 1. Walter de Gruyter, GmbH, 2013.
- [7] TURČINOVÁ, H.: *Characterization of functions vanishing at the boundary*. Bakalářská práce na MFF UK, Praha, 2017.

LETNÍ ŠKOLA
MATEMATIKY A FYZIKY 2017
SBORNÍK PŘÍSPĚVKŮ

Vydavatel: Vydavatelský servis, Plzeň

Editorky: Magdalena Krátká, Pavla Hofmanová

Sazba: Miloš Brejcha, Vydavatelský servis, Plzeň
Sazba v $\text{\LaTeX}$ u z písma Computer Modern ve variantě $\mathcal{CS}$ -font

1. vydání, počet stran: 110

Plzeň, 2017