

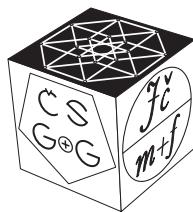
SLOVAK SOCIETY FOR GEOMETRY AND GRAPHICS

30th Symposium on
Computer Geometry SCG'2021



PROCEEDINGS OF THE
**SLOVAK-CZECH CONFERENCE ON
GEOMETRY AND GRAPHICS 2021**

Kočovce
September 13–16, 2021



41st Conference on
Geometry and Graphics

CZECH SOCIETY FOR GEOMETRY AND GRAPHICS
OF THE UNION OF CZECH MATHEMATICIANS AND PHYSICISTS

Language correction of the publication was not performed, language accuracy is the sole responsibility of the contributing authors.

Contributions included in the proceedings were selected by the scientific committee members based on reviews.

All rights reserved. No part of this work may be used or reproduced in any manner whatsoever or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopy, recording, or any information storage and retrieval system, without written permission from the publisher and copyright owner.



Vydavatelský servis
Republikánská 28, Plzeň

Proceedings of the Slovak-Czech Conference on Geometry and Graphics 2021
First edition

© Daniela Velichová, Miroslav Lávička, Dagmar Szarková, 2021

© Vydavatelský servis, 2021

ISBN 978-80-86843-72-8 (online)

ISBN 978-80-86843-73-5 (CD-ROM)

Slovak-Czech Conference on Geometry and Graphics 2021

Organized by:
Slovak Society for Geometry and Graphics

Organizing Committee:

Daniela **Velichová** – STU v Bratislave
Daniela **Richtáriková** – STU v Bratislave
Dagmar **Szarková** – SSGG, Bratislava

Scientific Committee:

Roman **Hašek** – Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích (CZ)
Pavel **Chalmovianský** – Univerzita Komenského v Bratislave (SK)
Mária **Kmeťová** – Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre (SK)
Miroslav **Lávička** – Západočeská univerzita v Plzni (CZ)
Pavel **Pech** – Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích (CZ)
Monika **Sroka-Bizoń** – Politechnika Śląska, Gliwice (PL)
Hellmuth **Stachel** – Technische Universität Wien (AT)
Marija **Šimić Horvath** – Sveučilište u Zagrebu (HR)
Daniela **Velichová** – Slovenská technická univerzita v Bratislave (SK)
Gunter **Weiss** – Technische Universität Wien (AT)

Table of Contents

FOREWORDS	7
PLENARY TALKS	9
BIZZARRI MICHAL <i>Curvature Adapted CNC Machining and Geometry Beyond</i>	11
ČIŽMÁR JÁN <i>Aktuálny odkaz Euklidových Základov</i>	21
PIOVARČI MICHAL <i>Perception-Aware Computational Fabrication</i>	27
WEISS GUNTER <i>Geometric Problems that Take Possession of Me</i>	29
CONTRIBUTED TALKS	43
BIZZARRI MICHAL, LÁVIČKA MIROSLAV, VRŠEK JAN <i>Curves of Tschirnhaus Type – Brief Commentary on Interpolations</i>	45
BOSÁKOVÁ ADRIANA, CHALMOVIANSKY PAVEL <i>A Note on the Structure of the Intersection Multiplicity of Two Plane curves</i>	53
BULANTOVÁ JANA, ŠAFARÍK JAN, ZRŮSTOVÁ LUCIE <i>Sbírka řešených příkladů z konstruktivní geometrie</i>	59
FERDIÁNOVÁ VĚRA, PORUBA JAKUB <i>GeoGebra Nástroje ve výuce planimetrie</i>	65
HAŠEK ROMAN <i>Dynamická geometrie online</i>	71
HLAVOVÁ MARTA <i>Interpolate bodů transcendentní křivky</i>	75
HOLEŠOVÁ MICHAELA <i>Constructions of Quatrefoil.</i>	81
CHALMOVIANSKÝ PAVEL <i>What is a Curve?</i>	87
CHODOROVÁ MARIE <i>Kolineace kuželoseček s využitím programu GeoGebra</i>	93

KOLÁŘOVÁ DANA <i>Plocha šikmého průchodu v nosné konstrukci historických mostů</i>	97
KOLCUN ALEXEJ <i>Fergusonovské scénare pre generovanie úsečky</i>	103
MACKOVOVÁ ALŽBETA <i>Voronoi Diagram in Three-Dimensional Hyperbolic Space</i>	109
MAKOVNÍK MARCEL, CHALMOVIANSKY PAVEL <i>Mesh Refinement Near Singularities</i>	115
PECH PAVEL <i>On one property of chords of conics.</i>	121
RÜCKSCHLOSSOVÁ TATIANA, VAJSÁBLOVÁ MARGITA <i>Geometria v profile absolventa stavebného odboru do roku 2030</i>	127
ŘADA JAKUB <i>GeoGebra Tools for Drawing in Double Orthogonal Projection and 4D Perspective.</i>	137
STACHEL HELLMUTH <i>Billiard Motions in Ellipses Invariants of Projective Nature</i>	143
VAJSÁBLOVÁ MARGITA <i>Geometric Aspects in Mathematical Foundations of Cartography</i>	149
VELICOVÁ DANIELA <i>30 Years of Seminars on Geometry and Graphics in Slovakia</i>	159
ZAMBOJ MICHAL <i>Twisted Filaments with Polyhedral Symmetries.</i>	167
LIST OF PARTICIPANTS	173

Forewords

The 7th SLOVAK-CZECH CONFERENCE ON GEOMETRY AND GRAPHICS was held on September 13–16, 2021 in the educational and recreational facility of the Slovak University of Technology seated in the manor house in Kočovce, Slovakia. Conference was the next successful common event of two traditional conferences organized by national societies for geometry and graphics, 30th SYMPOSIUM ON COMPUTER GEOMETRY SCG '2021 in Slovakia and the 41th CONFERENCE ON GEOMETRY AND GRAPHICS in the Czech Republic, arranged under the leadership of the Slovak Society for Geometry and Graphics.

Relatively few participants, 34, from 3 countries – Slovakia, Czech Republic, and Austria, attended conference in the still threatening COVID-19 pandemic situation. However, the atmosphere of the meeting was all the more cordial and enjoyable, as many participating colleagues were happy to attend this event as the first conference held in present form after the severe pandemic regulations, causing frustrating isolation enabling scientific communication restricted only to distance on-line meetings.

The rich conference programme included lectures and presentations from various fields of geometry and graphics. Three invited plenary lectures were presented, with one additional invited presentation. Professor JÁN ČIŽMÁR presented in his opening talk *Actual Message of the Euclidean Elements* a short overview of the contents of thirteen chapters of the eminent Euclidean work Elements (Stoicheia) in terms of today's classification of mathematical disciplines. His very first Slovak translation of this amazing unsurpassed treatise on the basics of geometry is completely ready for print, and is provided with a brief commentary on the content of the work in the language of modern mathematics. MICHAL BIZZARI from West Bohemian University in Plzeň, Czech Republic, showed in his invited lecture *Geometry and Tool Motion Planning for Curvature Adapted CNC Machining* how CNC machining remains still a rich source for challenging problems in computing, leading to possible optimisation by a careful geometric analysis of curvature-adapted machining via so-called second order line contact between tool and target surface, which means in geometry a new continuous transition between “dual” classical results in surface theory concerning osculating circles of surface curves and osculating cones of tangentially circumscribed developable surfaces. Invited lecture *Perception-Aware Computational Fabrication* introduced to participants how the current additive manufacturing can leverage the limitations of the Human Sensorial System to increase the apparent gamut of a 3D printer by combining numerical optimization with perceptual insights. Invited speaker MICHAL PIOVARČI from the Institute of Science and Technology

in Klosterneuburg, Austria showed applications of the proposed methodology to designing objects with prescribed compliance, mimicking the haptics of drawing tools, and manufacturing objects with spatially varying gloss. Professor Gunter Weiss from Austria described in his interesting invited lecture *Geometric Problems that Take Possession of Me* how he is doing research: “It often starts with getting stimulated by an article or a lecture at a conference. Putting one of its details in another context, mostly a projective geometric one, and then, by looking for meaningful generalisations, it is finally possible to extract a general principle which brings together divergent and often well-known facts. The resulting aha moments are almost addictive.”

Submitted 20 contributed talks from applied and pure geometry, graphics and education of geometry are published in this proceedings. As usually, traditional GeoGebra Workshop was an important part of the conference, as speakers presented their experience using dynamic mathematical programmes in their everyday pedagogical practise, and shared own developed teaching materials and solutions.

Conference was organized by the Slovak Society for Geometry and Graphics at the Institute of Mathematics and Physics, Mechanical Engineering Faculty of the Slovak University of Technology in Bratislava, Slovakia. Social programme included the tour to nearby castles Beckov and Čachtice, and visit to the Park of Miniatures in Podolie, where models of more than 50 Slovak castles, manor houses and historically important buildings are on display. Conference dinner was held in the pleasant environment, while participants were singing with great joy, accompanied by the violin performed by colleague Alexej Kolcun.

We would like to invite all interested parties to attend the next joint event of the 42nd CONFERENCE ON GEOMETRY AND GRAPHICS and the 31st SYMPOSIUM ON COMPUTER GEOMETRY SCG’2022 that will be held again together in 2022 by representatives of both national societies for geometry and graphics as the 8TH CZECH-SLOVAK CONFERENCE ON GEOMETRY AND GRAPHICS in the Czech Republic, in the Moravian old historical city Olomouc, under the supervision of the Czech Society for Geometry and Graphics.

Let us keep the good tradition of our common meetings deeply rooted in the history.

October 25, 2021

Daniela Velichová
chair of SSGG

Miroslav Lávička
chair of CSGG

PLENARY TALKS

Curvature Adapted CNC Machining and Geometry Beyond

Michal Bizzarri

*Department of Mathematics & NTIS, Faculty of Applied Sciences,
University of West Bohemia, Univerzitní 8, 301 00 Plzeň, Czech Republic
bizzarri@kma.zcu.cz*

Abstract. CNC machining is the leading subtractive manufacturing technology. Although it is in use since decades, it is far from fully solved and still a rich source for challenging problems in geometric computing. We demonstrate this at hand of 5-axis machining of freeform surfaces with toroidal cutters, where the degrees of freedom in moving the cutting tool allow one to adapt the tool motion optimally to the surface to be produced. It is based on a careful geometric analysis of curvature-adapted machining via so-called second order line contact between a tool and a target surface. This article is a commented version of paper [1] presented at Siggraph 2021 and published in ACM Transactions on Graphics.

Keywords: Computer-Aided Manufacturing, CNC machining, curvature adapted machining, computational fabrication, path planning, motion planning

1 Introduction

One of the most important fabrication techniques is *Computer numerically controlled (CNC) machining*, where a piece of raw material is cut into a final desired shape by a controlled material removal process. Material is cut away by a moving tool that spins with high speed around its axis. We will show, there is a variety of methods from classical geometry, geometric modeling and optimization, which can be effectively used for advances in CNC machining.

The initial stage of CNC machining, called *roughing*, starts with a solid material block from which most of redundant material is removed. This proceeds in parallel layers, leading to staircase effects near freeform surfaces. Roughing may be followed by *semi-finishing* where the most prominent staircase effects are removed. We are interested in the final *finishing* stage, which has the goal of producing nearly perfectly smooth surfaces.

Our focus is on *path planning for curvature adapted CNC machining of freeform surfaces*. The main idea is to move the cutting tool such that it optimally adapts to the local geometry of the surface to be produced, thereby achieving a high quality surface finish.

The best possible tool positions are close to those which provide so-called *second order line contact*. Hence, we carefully study second order line contact between toroidal tools and a given surface. Restricting to only those positions which are free of collisions we formulate the integration of tool positions into tool motions as a geometric optimization problem.

2 Geometry

2.1 Basic geometric model

The cutting tool T itself is complicated, but under fast rotation about its axis it generates a rotational solid. We are especially interested in toroidal tools, where the active part of the profile, that is the one which is designed for cutting, is a circle of radius r . The center of the cutting circle lies at distance m from the axis and under rotation about the axis it generates the medial circle c_m of radius m , see Fig. 1.

Some toroidal tools are constructed such that it is possible to use the inner parts of the cutting circles which corresponds to the hyperbolic part of the torus, with which we can approach convex surfaces.

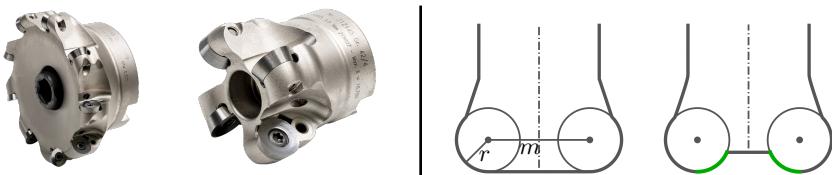


Figure 1: Left: Toroidal cutting tools with small and significant recess, respectively. Right: Their geometric simplification as meridians of rotational solids.

During the machining process, the tool T accesses the target surface S from the positive side (this is the side in which the normal vectors are pointing) and moves under a sequence of continuous motions. The tool is tangent to the surface along cutter contact curve (milling path) c_i and envelopes a surface E_i (machined surface), which ideally fits very well to the target surface in a sufficiently broad surface strip around c_i . Neighboring contact curves generate envelopes whose intersection curve s_i will in general exhibit tangent discontinuities and contain the largest deviations between the target surface and the produced surface, see Fig. 2. These so-called *scallops heights* shall be as small as possible in order to obtain a good surface finish.

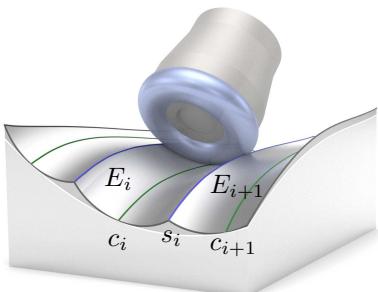


Figure 2: Tool envelopes. Three paths of a milling tool through a material block are shown. The neighboring envelopes of the tool's motion, E_i and E_{i+1} , intersect in a curve s_i , where the milling error is typically maximal. This phenomenon is called scalloping.

2.2 Local contact situation

In our algorithm we distinguish several types of points based on the signs of the principal curvatures. We arrive at the following cases:

- (a) $\kappa_1, \kappa_2 < 0$. *Convex elliptic point.*
- (b) $\kappa_1, \kappa_2 > 0$. *Concave elliptic point.*
- (c) $\kappa_1 \kappa_2 < 0$. *Hyperbolic point.*
- (d) $\kappa_1 \kappa_2 = 0$. *Parabolic/flat point.*

To analyze the local contact situation between the tool T and the target surface S we employ the osculating paraboloids. When aligning x, y, z -axes with the two principal curvature direction t_1, t_2 and the normal vector n , the osculating paraboloid P_S of S is given by the following formula

$$2z = \kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2.$$

The osculating paraboloid contains information about the variation of normal curvatures κ_n – a normal section of P_S with a plane spanned by the normal and the tangent vector (depending on the rotational angle ϕ) is a parabola (or straight line), whose curvature satisfies the Euler's formula

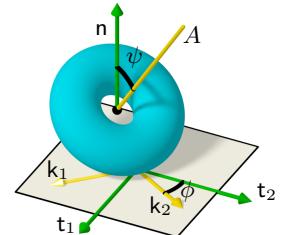
$$\kappa_n(\phi) = \kappa_1 \cos^2 \phi + \kappa_2 \sin^2 \phi.$$

The distribution of normal curvatures is nicely visualized with the *Dupin indicatrix*

$$i_S : \kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2 = \pm 1,$$

which is a radial diagram of the function $1/\sqrt{|\kappa_n(\phi)|}$.

Analogously, we investigate the curvature behavior of the tool surface T . One principal direction k_2 of T lies in the projection A' of the tool axis A onto the tangent plane. In the principal frame of S it shall be given by $k_2 := -t_1 \sin \phi + t_2 \cos \phi$. The other principal direction $k_1 = t_1 \cos \phi + t_2 \sin \phi$ of T is tangent to the rotational circle on T . We call ϕ the *rotational angle of the tool*, and the angle ψ between tool axis A and the surface normal n at the contact point p the *tilt angle of the tool*.



Let us provide more details on the *tool indicatrix* i_T , see Fig. 3. The principal curvature radius corresponding to k_2 is r . The principal curvature radius corresponding to k_1 is equal to the radius R_M of a sphere (Meusnier sphere; see below) which touches T along c_p . R_M is computed from tilt angle ψ , medial circle radius m , and profile radius r as

$$R_M = r + \frac{m}{\sin \psi}.$$

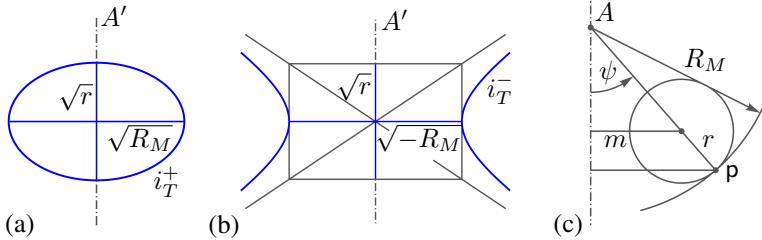


Figure 3: Tool indicatrix for a convex elliptic point on a toroidal cutter (a), and the negatively curved part of a toroidal cutter (b). In (c) we illustrate the geometry leading to the normal curvature radius R_M .

Although we usually speak about surfaces, we have to keep in mind that the actual tool and the actual surface to be produced are solids. Therefore it is useful to view also the osculating paraboloid P_S and P_T as a boundary of a solid \mathcal{P}_S and \mathcal{P}_T . Then, the local millability requires that the intersection of \mathcal{P}_S and \mathcal{P}_T consists of the single point. This actually means that the osculating paraboloid P_T lies above the osculating paraboloid P_S except at the contact point p . Equivalently, the corresponding Dupin indicatrix regions should have no common point, see Fig. 4.

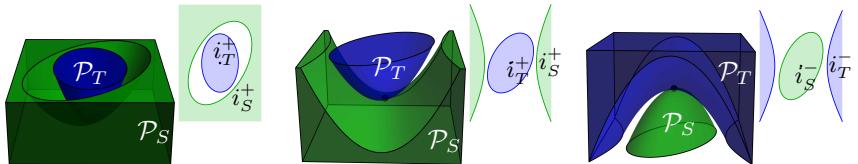
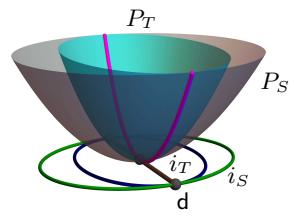


Figure 4: Locally collision free positions visualized via osculating solids and indicatrix regions for tool and target shape. From left to right: A concave point of S milled with a convex cutter; a hyperbolic point of S milled with a convex cutter; a convex point of S milled with a negatively curved cutter.

2.3 Second order line contact

In order to achieve a higher order contact between the tool and the reference surface we introduce the so-called *second order line contact*. Rotating the tool about the contact normal n may bring the osculating paraboloids closer together until in a limiting position they are tangent to each other along a parabola in a plane D through the contact normal. Equivalently the indicatrices i_T, i_S are tangent to each other at the end points of a com-



mon diameter with direction vector d .

In general it implies that there are curves $c_S \subset S$ and $c_T \subset T$ (e.g. the intersection curves $c_S = D \cap S, c_T = D \cap T$) which have second order contact at p . This situation is called *second order line contact* and can be characterized with help of the ruled surfaces N_S, N_T formed by the surface normals of S along c_S and normals of T along c_T ([2], pp. 457): *Two surfaces S, T are in second order line contact at p if there are curves $c_S \subset S$ and $c_T \subset T$ whose normal surfaces N_S and N_T are tangent to each other along the entire common normal at p .*

Since offset surfaces possess the same surface normal at corresponding points, the offsetting keeps second order line contact and thus we conclude: Torus T with profile circle radius r is in second order line contact with a surface S , if its medial circle c_m has second order contact with the offset S_r of S at distance r , see Fig. 5.

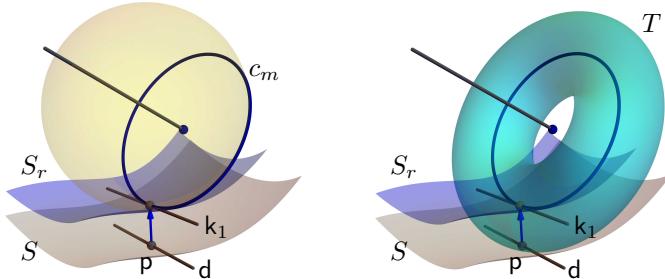


Figure 5: Circle c_m in 2nd order line contact with S_r lies on the Meusnier sphere (left). The corresponding torus T possesses 2nd order line contact with S (right).

Thus, offsetting brings us to the offset surface S_r and the medial circle c_m of T . There is a Meusnier sphere for the offset, and reversing the offsetting operation, we obtain the following nice local situation: All tools with a fixed profile radius r which are in second order line contact with a surface S at a point p at a rotation angle ϕ are tangent to a sphere $M(r, \phi)$ along a circle. This *tool Meusnier sphere* M touches the target surface at the contact point p , see Fig. 6.

Applying Euler's formula for the variation of normal curvatures to the offset surface, we obtain the formula for the radii of the tool Meusnier spheres

$$R_M = \frac{R_1(R_2 - r) \cos^2 \phi + R_2(R_1 - r) \sin^2 \phi}{(R_2 - r) \cos^2 \phi + (R_1 - r) \sin^2 \phi},$$

where $R_i = 1/\kappa_i$, $i = 1, 2$, are the principal curvature radii. Than the tilt and rotational angles of a tool T having the second order line contact (in a direction $d = \cos(\delta)t_1 + \sin(\delta)t_2$) with S are given by

$$\sin \psi = \frac{m}{R_M - r}, \quad \cot \phi = \frac{1 - r\kappa_1}{1 - r\kappa_2} \cot \delta,$$

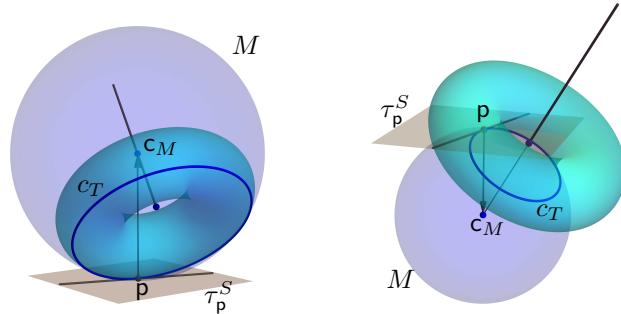


Figure 6: Tool Meusnir spheres at an elliptic point (left) and a hyperbolic point (right) of the tool.

see [1] for more details. The above formulas provide a correspondence between the tilt and rotational angle for the second-order line contact – for a specific rotational angle the tilt angle has to get adapted which yields one-parameter family of solutions. It is shown in [1] that these solutions form one wedge (at elliptic point of S) or two wedges (at hyperbolic point of S) of *admissible directions* d along which 2nd order line contact of T with S can be obtained.

The 2nd order line contact means a very good local approximation as the distance error between T and S in d behaves as $\mathcal{O}(h^3)$, h being a parameter that parametrizes the medial circle c_m , see Fig. 7. However, the cubical behaviour of the error function corresponds to a sign change at zero (contact point p) and consequently local penetration in the very neighborhood of p . This phenomenon, called “gouging” in the machining literature, is very undesirable as it directly implies overcutting at p .

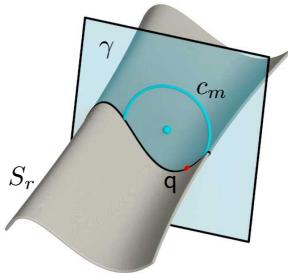


Figure 7: Osculation. The medial circle of the torus, c_m , has second order contact with S_r at q . The osculation implies local penetration of c_m and S_r in the neighborhood of the contact point q . That is, in the plane of c_m , γ , the circle intersects the surface-plane intersection curve (black) at q .

We fix this phenomenon by increasing the tilt angle ψ about $\varepsilon > 0$. This is the same as working with slightly smaller tool Meusnir spheres and considering tools tangential to those. This fixes the penetration locally, i.e., close to p , but may lead to global collision, discussed next.

3 Accessibility and collision avoidance

To control global collisions, we perform collision tests as follows. The *head* of the milling cutter is conceptualized as a torus while the *shank* is represented by a cylinder (the real shank is a more complex object, but its cylindrical bound is taken for the sake of simplicity).

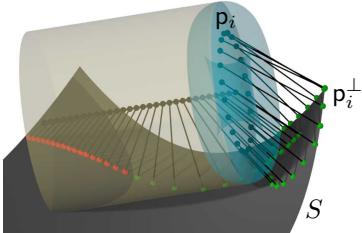


Figure 8: Global collision detection test. The medial circle and the axis of the tool are sampled and their footpoints on S are computed. The collision-free footpoints (green) and those that correspond to collision (red) are returned.

To detect a collision of the head, we sample the medial circle c_m and compute the footpoints on S . For a sample point p_i , the projection algorithm returns its footpoint p_i^\perp , see Fig. 8, and a distance check $\|p_i - p_i^\perp\| < r$ reveals the collision (up to sampling of c_m). For the cylindrical part, we proceed analogously: we sample the axis A , compute the footpoints on S , and if lying in the half-space of the shank part, a distance check $\|p_i - p_i^\perp\| < r + m$ is evoked. If the collision is realized at some point, the collision routine is terminated (and the corresponding tangent direction d is labeled as colliding).

4 Tool motion planning

With the second-order analysis and collision tests at hand we can move on in our algorithm to the tool motion planning.

4.1 Contact path construction

We start with the contact paths construction. For the input geometry S and tool T we perform the analysis at sampled points $p_i \in S$ and end up with the set of wedges, see Fig. 9 (a). The green wedges contain directions providing the second-order line contact positions that are also globally collision-free; red wedges correspond to the second-order directions where a collision occurs; at white wedges only the first-order contact is possible.

We design the milling paths $c_j \in S$, $j = 1, \dots, n$, as level sets of a scalar function $G : S \rightarrow \mathbb{R}$ defined on S , see Fig. 9 (b). The function G is computed within an optimization-based framework as follows.

In our discrete setup, S is represented by a triangle mesh with N vertices p_i . G is assumed to be linear in each triangle and thus defined by its values x_i at p_i . The vector $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_N\}$ of function values at vertices is the unknown of a

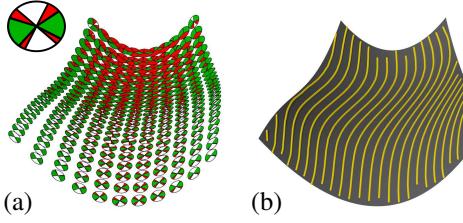


Figure 9: Contact path construction. (a) Second-order analysis and collision tests yields three types of directions. (b) The contact paths are computed as level-sets of a scalar function G .

minimization problem. Its objective function is composed of three parts:

$$F(\mathbf{x}) = w_1 F_{ortho}(\mathbf{x}) + w_2 F_{fair}(\mathbf{x}) + w_3 F_{parallel}(\mathbf{x}),$$

see [1] for more detail. $F_{ortho}(\mathbf{x})$ forces the contact paths to go as orthogonal as possible through the green wedges. The fairness term $F_{fair}(\mathbf{x})$ ensures that the scalar function is nice and fair leading to nice and fair contact curves. Finally, $F_{parallel}(\mathbf{x})$ votes for the contact paths to be parallel in the geodesic sense. Scalars w_1 , w_2 , and w_3 are weights to control orthogonality, fairness, and parallelism of the milling paths, respectively.

4.2 Tool motion planning

Once the contact paths are computed, the motion construction inheres in finding smooth rotation $\bar{\phi}(t)$ and tilt $\bar{\psi}(t)$ functions along each path $c(t)$. Since we aim at parallel envelope strips with equal widths, we do not further optimize the rotation angle and choose the tool axis in the plane spanned by the path tangent and the surface normal at $c(t)$.

Thus, the tool motion is optimized only via the tilt function $\bar{\psi}(t)$, which is constructed as follows: We sample parameter values $t_0, \dots, t_k \in [0, 1]$ and for each t_i :

- (i) Compute the tilt angle ψ_i corresponding to the 2nd order line contact (if there is no 2nd order line contact possible, $\psi = 0$).
- (ii) Sample values for tilts from $[\psi_i + \epsilon, \pi]$ and perform the collision detection. Penetration-free positions correspond to the interval $[\psi_i^0, \psi_i^1]$, see Fig. 10, top.

Intervals $[\psi_i^0, \psi_i^1]$ determine a region of admissible tilts. Thus, tool motion planning is translated to the construction of a function $\bar{\psi}(t)$ through the green region, which is (a) close to the bottom boundary ψ_i^0 (yielding tool orientations close to 2nd order line contact) and (b) possesses a nice distribution of curvature (yielding a fair motion of the tool), see Fig. 10, bottom. This leads to a quadratic minimization problem with constraints, see [1] for more details.

5 Conclusion

We have introduced a path-planning pipeline for curvature adapted 5-axis CNC machining of free-form surfaces. We conduct curvature analysis to compute

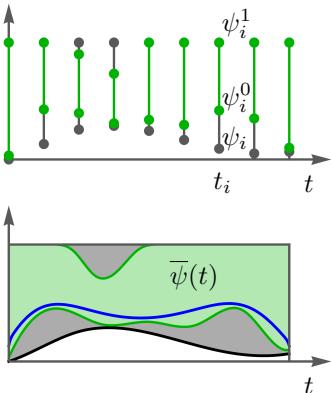


Figure 10: Tilt function construction. Top: Collision tests at sampled values along a contact curve $c(t)$ determine intervals $[\psi_i^0, \psi_i^1]$ (green) of admissible tilts yielding penetration-free positions of T . The values ψ_i correspond to 2nd order line contact positions (if possible). Bottom: Tilt function construction – we look for a nicely shaped smooth spline function in the corresponding smooth green (penetration-free) region.

tangent directions along which second order line contact between a toroidal cutting tool and the reference surface is possible, followed by a global collision detection test to remove positions that are not physically realizable. We use this analysis to design collision free tool motions which yield nearly parallel milling strips and generate surfaces which well approximate the target geometry and reduce kink angles at intersections of neighboring strips. As a result, our approach offers highly accurate machining that needs a lower number of milling paths. We have tested the proposed methodology on various free-form surfaces, compared it to state-of-the-art CAM path-planning software, see Fig. 11, and validated it by real machining experiments, see Fig. 12.

Acknowledgments

I would like to thank Michael Bartoň, Florian Rist, Oleksii Sliusarenko and Helmut Pottmann for the excellent cooperation on this project. The author is supported by the grant 21-08009K *Generalized Symmetries and Equivalences of Geometric Data* of the Czech Science Foundation.

References

- [1] M. BARTOŇ, M. BIZZARRI, F. RIST, O. SLIUSARENKO, AND H. POTTMANN, *Geometry and tool motion planning for curvature adapted CNC machining*, ACM Transactions on Graphics, 40 (2021).
- [2] H. POTTMANN AND J. WALLNER, *Computational Line Geometry*, Springer, 2001.

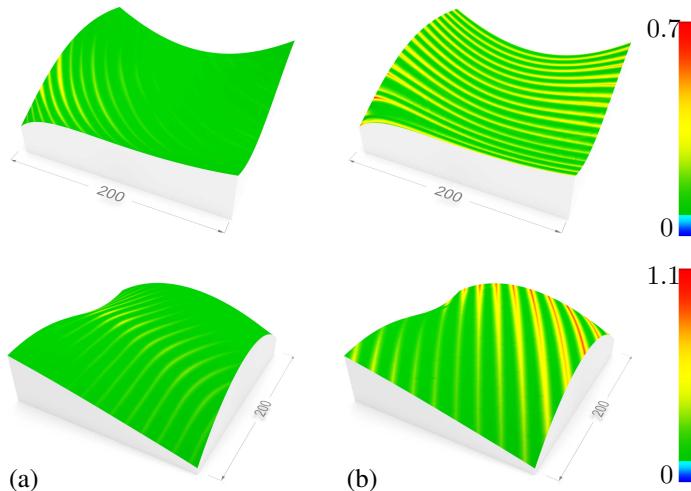


Figure 11: Comparison with a commercial software. Two free-from surfaces are approximated by $n = 28$, and $n = 14$ milling strips, respectively, using our algorithm (a) and the commercial software SprutCAM (b). The machined envelopes are color-coded by the error to the reference surface. Our algorithm produces a much smaller machining error (undercutting) and thus a better surface finish.

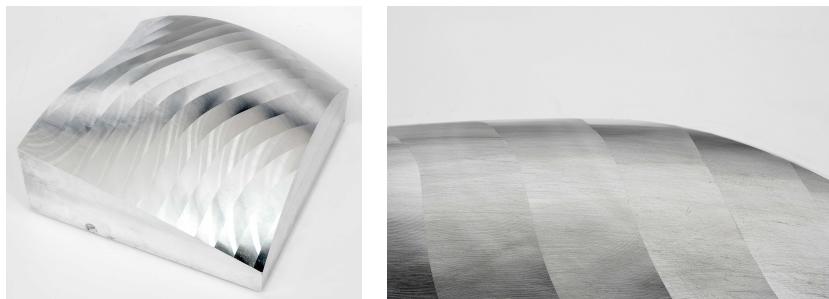


Figure 12: Physical validation. Left: As the real machining is time demanding, a sparser set of the milling paths was used. The surface contains all types of points (convex elliptic, hyperbolic, concave elliptic), yet the transition between these regions is very smooth. Right: A zoom-in figure of a fine finish with a marginal scalloping effect; note the smoothness of the silhouette.

Aktuálny odkaz Euklidových Základov

Up to Date Message of the Euclid's *Elements*

Ján Čižmár

jan.cizmar85@gmail.com

Abstract. The first complete translation of the Euclid's *Elements* into Slovak offers an opportunity to reflect newly the significance of this work in the school practice, especially in the writing textbooks as well as in the teaching elementary geometry in the higher forms of the grammar schools. A relatively profound acquaintance with the essence of the axiomatic-deductive method in the elementary geometry is a very desirable knowledge of every well-educated person nowadays.

Keywords: ambiguous Euclid's terminology, axiomatic-deductive method

Kľúčové slová: viacznačná Euklidova terminológia, axiomaticko-deduktívna metóda

1 Úvod

V dohľadnom má vyjsť vo vydavateľstve PERFEKT, a.s., prvý úplný slovenský preklad a komentár najvýznamnejšieho diela antickej matematiky – Euklidových Základov. Dvadsaťtri storočí, ktoré uplynuli od vzniku tohto impozantného súhrnu celej teoretickej starovekej matematiky sformovanej v prostredí gréckej kultúry približne do konca 4. storočia pred naším letopočtom, dokonale preverilo a potvrdilo kľúčový význam tohto prameňa pre vývoj matematiky ako exaktnej vedy. Dominantné rysy diela, z ktorých medzi najvýraznejšie patrí *úplnosť* zachytenia obsahu všetkých podstatných výsledkov profilujúcich obraz dobovej teoretickej matematiky, *systematicosť* spracovania prezentujúca matematiku ako jednotný celok previazaný obsahovými a logickými súvislostami a príkladné rešpektovanie zásady *postupnosti*, ktorá bola ako jeden z hlavných didaktických princípov sformulovaná v oveľa neskorších historických epochách, predurčovali dielo do vzoru učebníc na dlhý čas a pre mnohé oblasti vedy vyspelých civilizačíí. A *axiomaticko-deduktívna metóda* spracovania, ktorej koncepciu dovršil nedlho pred Euklidom Aristoteles, uplatnená v *Základoch* na vybudovanie obsahovej vedeckej teórie totálne a s jednoznačným úspechom potenciálne otvárala cesty nasledovania v partikulárnych odvetviach matematiky aj v ďalších blízkych vedách, najmä prírodných a aplikovaných.

2 Krátky náčrt obsahu *Základov a jeho zdroje*

Prvé poznatky teoretickej povahy z oblasti exaktných aj aplikáčnych disciplín (matematika, astronómia, geodézia) čerpala rodiaca sa grécka matematika od 6. storočia pred našim letopočtom z bohatého empirického materiálu zhromažde-ného pozorovaním, plnením praktických úloh v mnohých sférach ekonomického, správneho a politicko-vojenského fungovania spoločnosti v štátnych útvaroch na území starovekého Egypta a Mezopotámie, systemizáciou a zovšeobecňovaním údajov z pozorovania opakujúcich sa periodických javov. O vplyve týchto zdrojov na matematické spisy Tálesa a Milétskej školy, ako aj Pythagora a jeho školy nie pochýb vzhľadom na potvrdené pobytu Tálesa a Pythagora v uvedených krajinách. Znalosť egyptskej a babylonskej matematiky dosvedčujú aj zrejmé stopy týchto prameňov v dielach Demokrita a Eudoxa, hoci priamy fyzický kontakt týchto osobností s učencami spomenutých území nie je spoľahlivo potvrdený. Je však zjavné, že osvojenie si matematických poznatkov starších civilizácií gréckymi pokračovateľmi bolo spravidla spojené s hlbším prienikom do podstaty tematiky a so zovšeobecňujúcim obsahovo-logickým pohľadom na jej miesto a súvislosti v sústave dobovej matematiky.

K takému zdokonaľovaniu a zvyšovaniu úrovne abstrakcie staršieho vývinového stupňa matematiky prispeli gréčki autori za tri storočia (priблиžne do roku 300 pred našim letopočtom) celým radom nových objavov, týkajúcich sa obsahu, metód a prostriedkov matematiky, ktoré ju zaradili po stránke obsahovej kompaktnosti a formálno-logickej dokonalosti na prvé miesto v súdobej skupine exaktných a prírodných vied. Azda desiatky autorov, z ktorých závažnosťou objavov objektov, ich vlastností a súvislostí, ako aj formovaním metód tvorby a logického aparátu vynikali také významné osobnosti histórie vedy, akými boli Táles a jeho nasledovníci z Milétskej školy, Pythagoras a jeho škola, špeciálne Hippias, ďalej Demokritos, Archytas, Hippokrates (z ostrova Chios), Teodoros z Kyrény, Teaitetos a Eudoxos, zhromaždili pozoruhodný objem výsledkov rozmanitej tematiky, značne rozdielnej úrovne systemizácie aj podstatne odlišnej dôležitosti pre ďalší vývoj, pokrok a logickú štruktúru teórie. Z pokusov navodiť poriadok v nesúrodej záplave nových poznatkov sa vynímalo Hippokratovo dielo *Základy*, systemizujúce teóriu objektov spadajúcich v dnešnom ponímaní do oblasti elementárnej planimetrie. Jeho uverejnenie vyše sto rokov pred Euklidovými *Základmi* nemohlo, prirodzene, dosahovať rozsah a aktuálnosť Euklidovho diela.

Euklidova monografia *Základy* vstúpila na historickú scénu nejaký čas po roku 300 pred našim letopočtom. V čase jej dokončenia Euklides už určite pôsobil vo vedecko-umeleckej inštitúcii *Museion*, ktorú v egyptskom meste Alexandria, založenom Alexandrom Veľkým, zriadil panovník Ptolemaios I. (Sotér) ako nástupca na trón uvoľnený úmrтím Alexandra Veľkého a zakladateľ dynastie Ptolemaiovcov, vládnucej v Egypte do roku 30 pred našim letopočtom.

Dve hlavné odlišnosti, ktorými Euklidovo dielo predstihovalo diela s porovnatelným obsahom a zameraním, spočívali v nasledovnom:

1. Dielo bolo systematicky zhrnutým a usporiadaným súhrnom všetkých dôležitých tematických celkov súdobej teoretickej matematiky.
2. Metóda prezentácie obsahu je dôsledne axiomaticko-deduktívna.

Obsah *Základov* je zoradený do trinástich tzv. kníh, ktorých špecifikáciu možno z pohľadu dnešnej klasifikácie matematických odborov, disciplín a ich časti nazvať nasledovne:

Kniha 1: Základy planimetrie

Kniha 2: Geometrická algebra

Kniha 3: Geometria kružníc a kruhov

Kniha 4: Pravidelné (rovinné) mnohouholníky

Kniha 5: Veličiny: pomery a úmery

Kniha 6: Podobnosť

Kniha 7: Elementárna teória čísel

Kniha 8: Spojité úmery

Kniha 9: Aplikácie teórie čísel

Kniha 10: Iracionálne veličiny

Kniha 11: Základy stereometrie

Kniha 12: Obsahy a objemy

Kniha 13: Pravidelné mnohosteny

Vydanie úplných Euklidových *Základov* býva spravidla doplnené tzv. knihou 14 a tzv. knihou 15, ktorých autorom nie je Euklides, pochádzajú z neskoršej doby, majú zreteľne nižšiu teoretickú úroveň a dôvodom ich príčlenenia k (pravde-podobnému) originálному Euklidovmu textu je zjavne didaktický zámer poskytnúť čitateľovi dopĺňajúce podrobnosti v tematike naznačenej alebo stručnejšie spracovanej u Eukliida.

Jednotlivé knihy *Základov* – podľa dnešných kritérií kapitoly mierne nad priemer rozsiahlej knihy – prezentujú zrejme v Euklidovej úprave aktuálny stav teórie v tých oblastiach matematiky, ktoré v Euklidovej dobe boli už dostatočne diferencované a vyprofilované. Obraz stavu geometrie poskytujú knihy 1, 3, 4, 6, 11, 12, 13, aritmetiku sprostredkujú knihy 5, 7, 9 a o algebre informujú knihy 2, 8, 10. Pravda, hranice medzi disciplínami nie je vhodné chápať príliš rigidne; týka sa to väčšinou aritmetiky a algebry, ale napr. v prípade knihy 2 výrazne aj vzťahu geometrie a algebry. Pri názve *algebra* treba mať na zreteli, že antika tento termín nepoznala a európska matematika sa s ním váhavo a sporadicky oboznamovala najskôr od 10. storočia.

Väčšina matematických poznatkov zahrnutých do *Základov* pochádza od popredných i menej známych autorov patriacich k niektorým školám a skupinám, no významné výsledky dosiahli aj niektorí autori pracujúci v pomernej izolácii. Elementárno-geometrické planimetrické texty boli na pokročilej úrovni spracované už Hippokratom, ktorý pôsobil okolo roku 420 pred našim letopočtom v Aténach a mnohé informácie z jeho *Základov* sú obsiahnuté v knihách 1, 3, 4, 6 Euklidovho diela. Podstatné časti teórie

o pomeroch a úmerách, ako aj teória exhaustácie, zachytená explicitne v knihe 12 a aplikačne aj v niektorých ďalších knihách, je pripisovaná Eudoxovi. Hlavnú zásluhu na sformulovaní kľúčových pojmov a odvodení väčšiny výsledkov v teórii iracionalít má Teaitetos, ktorý je aj objaviteľom pravidelných mnohostenov dvanásťsten a dvadsaťsten, keď prvé tri – štvorsten, osemsten a kocku – poznali už pythagorovci.

Euklidova zásluha spočíva primajmenšom vo výbere, zoradení a prepracovaní rozsiahleho materiálu takým spôsobom, že minimálne v jednotlivých kapitolách pôsobí téma ucelene a uzavreto, text je podaný zrelým tradičným štýlom a všetky tematické celky sú spracované axiomaticko-deduktívou metódou. Výsledkom Euklidovho úsilia je také hodnotné dielo, že jemu podobné, tým menej s ním rovnocenné sa nepodarilo plnohodnotne a v analogickom rozsahu zopakovať po celé dve tisícročia. Napriek historicky pochopiteľným medzeraám a nedokonalostiam slúžilo a v podstate dodnes je vzorom budovania axiomaticko-deduktívnej teórie špeciálnej vedy.

3 Forma Základov: jazyk a možnosti interpretácie. Sémantické a semiotické aspekty

Vznik Euklidových *Základov* časovo spadá do rozhrania medzi aténskym a alexandrijským obdobím vývoja starogréckej a grécko-helenistickej matematiky (okolo roku 300 pred našim letopočtom). Berúc do úvahy tento fakt, pochopíme bez zdĺhavej analýzy vplyv limitujúcich faktorov konca aténskeho obdobia na rozsah, hĺbku a kvalitu Euklidovho diela z pohľadu jeho jazykovej stránky, špeciálne zo sémantického a semiotického hľadiska.

V prvom rade si treba uvedomiť, že v duchu hlboko zakorenenej pythagorovskej tradície až do konca vývoja starovekej grécko-helenistickej matematiky (pričiže prvá štvrtina – prvá polovica 6. storočia) sa pod pojmom *čísla* rozumeli len prirodzené čísla (v dnešnej terminológii), aj to s chápaním jednotky nie ako čísla, ale ako nedeliteľného základu na aditívnu tvorbu čísel. Veľkú oblasť objektov odvodených od čísel tvorili *veličiny*, čo boli v prvej etape záujmu matematiky o ne objekty nejakým spôsobom ohodnotiteľné kvantitatívne pomocou (prirodzených) čísel. Relácie a operácie, v dnešnej teoretickej literatúre nasledujúce explicitne (t. j. definitoricky) bezprostredne po zavedení čísel v postupne budovanej aritmetickej štruktúre, sa v starovekej teoretickej matematike (čo platí aj pre Euklidovo dielo) zavádzali na akejsi intuitívnej báze bez uvedomeného odlišenia významu slova v prirodzenom jazyku a významu v jazyku vedeckej disciplíny. Na ilustráciu: V Euklidovom vyjadrovaní chýbajú pojmy (a adekvátne termíny) pre relácie, operácie a výsledky v prípadoch *sčítovanie*, *odčítovanie*, *usporiadanie* (menší, väčší) a derivátoch *sčítance*, *súčet*, *menšenec*, *menšiteľ*, *rozdiel*. Analogické nedostatky (z dnešného pohľadu) sa vyskytujú pri operácii násobenia, ktorá sa v porovnaní s dnešnou metodikou vyučovania zavádzala spravidla iným spôsobom, operácia delenia pracuje s pojмami *odmeriavania* atď. Identifikácia

takýchto rozdielov a chýbajúcich pojmov a termínov by stála za podrobnej analýzu a považujem to za naliehavú úlohu, s ktorou by sa didaktická zložka našej matematickej komunity mala v krátkom čase vyrovnáť. Metodika vyučovania aritmetiky na primárnom stupni školského vzdelávania je totiž značne blízka metódam budovania teórie tohto odboru v Euklidových Základoch.

Prv, než sa pozornosť príspevku plne zameria na jazykovú a terminologickú stránku Základov, niekol'ko poznámok sa dotkne hlavných matematických metód tvoriacich ich odbornú bázu. Ide o niektoré metódy, ktorých účinnosť a produktivnosť bola dostatočne preverená dlhším vývojom pred časom Základov, na druhej strane o relatívne nové alebo celkom nové metódy, ktoré do súboru Základov vstupovali ako najnovšie výsledky špičkových smerov výskumu. Dominantnou metódou prvej skupiny bola syntetické metóda elementárnej geometrie rozvíjaná na báze prirodzeného jazyka od prvopočiatkov teoretických prístupov v gréckej matematike, spájajúca všeobecne zrozumiteľné jazykové formulácie s postupne rozširujúcou a komplikujúcou sa grafickou zložkou výkladu. Druhou metódou, výdatne podporujúcou exaknosť postupov a presvedčivosť výsledkov, bola geometrická algebra (názov zavedený až koncom 19. storočia H. G. Zeuthenom). Pozoruhodné boli dve relatívne nové a veľmi produktívne metódy s nádejne širokou sférou aplikácií, a to teória proporcíí a metóda exhaustácie, o ktorých dômyselné teoretické základy sa zaslúžil najmä Eudoxos. A veľmi rozsiahla a vrcholne sofistikovaná s netušenou škálou ďalších náročných aplikácií bola teória kvadratických a bikvadratických iracionálít, ktorej duchovný otcom bol Teaitos.

Na tejto teoretickej základni predstavil Euklides za pomoci skromných výrazových prostriedkov s malými výnimkami celú teoretickú matematiku svojej doby pomocou metódy, ktorej zásady celkom nedávno – pred pári desaťročiami – dopracoval Aristoteles, vychádzajúc z pokroku logiky a filozofie, ako všeobecnú metódu výstavby vedeckej disciplíny. Je ľahkou axiomatiko-deduktívna metóda.

Podstatnou zložkou tvorby teórie touto metódou je *jazyk* v zmysle špecifického formálnologického jazyka predmetnej vedeckej disciplíny. Prirodzene, aj tento jazyk sa realizuje na báze prirodzeného jazyka, ale jeho podstatnou zložkou je špecifický súbor znakov charakteristický pre daný vedný odbor. – Táto zložka v Základoch chýba absolútne, ak nerátame do nej označovanie bodov písmanami používanej abecedy.

Jazyk Základov je temer totálne rétorický. V tom sa zákonite odráža stupeň vývoja starogréckej matematiky na konci jej aténnej etapy trvania. Príčinou tohto javu bola najmä existenčná späťost odborného jazyka oboch hlavných disciplín dobovej matematiky – aritmetiky a geometrie – s prirodzeným jazykom, z ktorého pochádzala takmer výlučne celá terminologická výbava s minimom umelých novotvarov. Táto blízkosť mala za následok aj značne

pomalé tempo pojmovej diferenciácie a veľmi skromné obohacovanie terminologickej zásoby.

Prakticky chýbala *semiotická* (znaková) zložka (matematického) jazyka: okrem alfabetického zápisu (prirodzených) čísel a označovania bodov veľkými písmenami prakticky neexistovali iné než slovné vyjadrenia matematických objektov; z toho prvá zložka, t. j. zápis konkrétnych čísel, vlastne neboli súčasťou „vyššej“ matematiky. Prvé skromné začiatky *synkopického* jazyka (t. j. označovania objektov, relácií a operácií skratkami termínov pre ne) pre oblasť aritmetiky a algebry sa v náznaku systému objavili až u Diofanta v polovici 3. storočia nášho letopočtu; absencia tohto jazyka u Euklida je pochopiteľná.

Významnú úlohu v *Základoch* má zložka *interpretačná*, ktorej podstatou je *modelovanie* objektov, relácií, operácií atď. nejakej teórie prostriedkami inej teórie. V *Základoch* sa tento problém v podstate zužuje na modelovanie aritmeticko-algebrických objektov a vzťahov geometrickými prostriedkami; a tento problém sa týka aj vzájomných vzťahov geometrických objektov, keď podstata týchto vzťahov presahuje do oblasti *kvantity*. Dominancia geometrickej interpretácie nevyplývala z nejakej osobitnej náklonnosti Grékov ku geometrii, ale z rozdielnej úrovne stavu historického vývoja jednotlivých disciplín, ako aj z okruhu aktuálnych problémov v nich. Prednostou geometrickej metódy je jej názornosť a schopnosť prvého odhadu vlastností, vzťahov a riešenia úloh, nedostatkom je neschopnosť zachytiť kvalitatívne vlastnosti a rozdiely aritmetických a algebrických objektov.

4 Záver

Aktuálny význam Euklidových *Základov* spočíva – okrem ich trvale hodnotného obsahu a formy ako vzoru tvorby stredoškolských a vysokoškolských učebníček elementárnej geometrie – v dvoch didaktických aspektoch presahujúcich hranice matematiky. Prvým je rešpektovanie overeného poznatku, že adekvátna a korektná terminológia je neoddeliteľnou zložkou učebnice rovnocennou s jej vecným obsahom, a pestovanie návykov kultivovaného používania terminológie je nevyhnutnou súčasťou vyučovania. Druhým odkazom Euklida je, že základné poučenie o axiomaticko-deduktívnej metóde a ukážka jej použitia vo vyučovaní matematiky na strednej škole má svoje miesto vo vzdelávacom a výchovnom programe. Príde čas, keď toto poznanie prenikne aj do iných vyučovacích predmetov.

Literatúra

- [1] Euclid: *The Thirteen Books of The Elements* (preklad a komentár Th. L. Heath), Dover Publications, New York, 1956

Perception-Aware Computational Fabrication

Ľudské vnímanie v počítačom riadenej výrobe

Michal Piovarči

*Institute of Science and Technology Austria
Am Campus, 3430 Klosterneuburg, Austria
michael.piovarci@ist.ac.at*

Haptic and visual feedback are important for assessing objects' quality and affordance. One of the benefits of additive manufacturing is that it enables the creation of objects with personalized tactile and visual properties. This personalization is realized by the ability to deposit functionally graded materials at microscopic resolution. However, faithfully reproducing real-world objects on a 3D printer is a challenging endeavor. A large number of available materials and freedom in material deposition make exploring the space of printable objects difficult. Furthermore, current 3D printers can perfectly capture only a small amount of objects from the real world which makes high-quality reproductions challenging. Interestingly, similar to the manufacturing hardware, our senses of touch and sight have inborn limitations given by biological constraints. In this talk, I will demonstrate how we can leverage the limitations of the Human Sensorial System to increase the apparent gamut of a 3D printer by combining numerical optimization with perceptual insights. Instead of optimizing for exact replicas, we search for perceptually equivalent solutions. I will show applications of the proposed methodology to designing objects with prescribed compliance, mimicking the haptics of drawing tools, and manufacturing objects with spatially varying gloss.

Keywords: perception, computational fabrication, haptics, appearance

Haptická a vizuálna spätná väzba sú dôležité pre hodnotenie kvality a dostupnosti objektov. Jednou z výhod aditívnej výroby je, že umožňuje vytváranie objektov s prispôsobenými hmatovými a vizuálnymi vlastnosťami. Táto personalizácia sa realizuje schopnosťou ukladať funkčné materiály v mikroskopickom rozlíšení. Verná reprodukcia skutočných objektov na 3D tlačiarni je však náročným úsilím. Veľké množstvo dostupných materiálov a voľnosť v ukladaní materiálu sťažujú skúmanie tlačiteľných predmetov. Súčasné 3D tlačiarne navyše dokážu dokonale zachytiť iba malé množstvo predmetov zo skutočného sveta, čo komplikuje generovanie vysokokvalitných reprodukcii. Je zaujímavé, že podobne ako výrobny hardvér, aj naše zmysly pre dotyk a zrak majú vrodené limitácie dané biologickými obmedzeniami. V tejto prednáške ukážem, ako môžeme využiť obmedzenia ľudského senzorického systému na zvýšenie zdanlivej škály 3D tlačiarnej kombináciou numerickej optimalizácie a ľudského vnímania. Namiesto

optimalizácie pre presné repliky hľadáme perceptuálne ekvivalentné riešenia. Ukážem aplikácie navrhovanej metodiky na dizajn objektov s predpísanou deformáciou, napodobňovanie hmatovej odozvy kresliacich nástrojov a výrobu objektov s priestorovo sa meniacim leskom.

Kľúčové slová: ľudské vnímanie, počítačom riadená výroba, hmat, vzhľad

Geometric Problems that Take Possession of Me

Gunter Weiss

*University of Technology Dresden, Germany, & University of Technology Vienna, Austria
email: weissgunter@gmx.at*

Abstract. This article gives a description of my way of doing research: It often starts with getting stimulated by an article or a lecture at a conference. Putting one of its details in another context, mostly a projective geometric one, and then, by looking for meaningful generalisations, it often becomes possible to extract a general principle. Even so one starts with well-known facts, the resulting aha moments are almost addictive. A first example of such topics is the Golden Mean. Others are “Frégier’s theorem”, “planar circular bi-arcs”, “polyhedrons made by setsquares”, “ C^r -biarcs of circles and conics”, the “theorem of Simson-Wallace” “Stellae octangulae”. There remain still many open questions. Unfortunately, the mentioned topics are not within the actual scientific mainstream, but their inner beauty justifies to be curious and to struggle for getting answers to open questions.

Key words: Golden Mean, Frégier, Simson-Wallace, C^r -bi-arc of circles and conics, stella octangula

1 Introduction

This Article concerns a very personal way to stumble over geometric questions due to an education in Geometry in Vienna by teachers as Heinrich Brauner, Josef Krames, Walter Wunderlich, and Hellmuth Stachel. But it is also due to stimulation discussions and collaborations with Austrian and foreign colleagues met e.g. at conferences on Geometry and Graphics abroad.

There will be descriptions of this personal approach to geometric research by some examples of geometric topics mentioned in the abstract. Problems pop up often by accident, and even so they mostly root in Elementary Geometry they cause surprise, admiration, amazement, and curiosity. Such somehow outdated material can give deeper insight and awareness for astonishing interrelations.

2 First example: The Golden Mean

This is a topic with hundreds of references, and it seems to be just a grazed lawn. The topic finally was forced upon me by an “Iterated Polarizing Process” IPP applied to a sextuplet of points in a real projective plane, see [8] and Figures 1 and 2. Each subset of five points defines a conic resp. its polarity, the remaining 6th point maps to the polar line with respect to this polarity. After this first step of the IPP we thus get 6 lines, and each subset of five lines defines a conic, resp. its polarity. We map the remaining line to its pole, such that we, after the second step of the IPP again get 6 points, see Fig.1. It turns out that the IPP has an attractor. The limit figure is a so-called “Golden Hexagon”

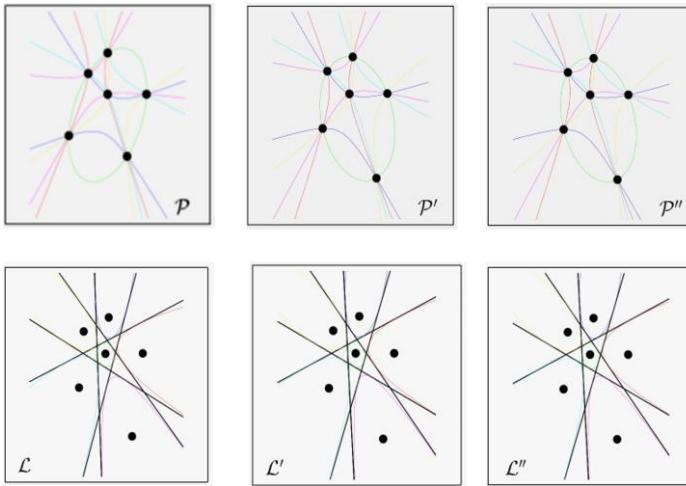


Fig. 1: Iterated Polarizing Process IPP, three stages; (from [8]).

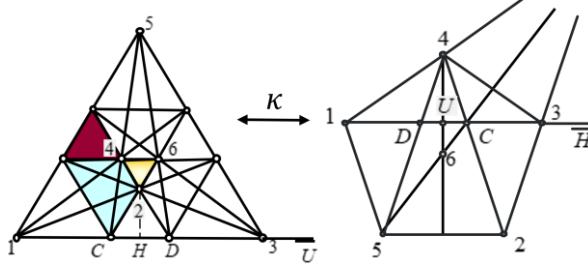


Fig. 2: Euclidean special attractors of the IPP, all of them are collinear; (from [8]).

It turns out that each IPP has an attractor, and independent of the start-hexagons, the resulting attractors are so-called Golden Hexagons. All of them are collinearly related, see Fig.2 and [Weiss]. Furthermore, each partition into two triangles delivers triangles in Desarguesian position, and on lines connecting two points there occur two additional points such that the resulting quadruplet defines a “Golden Cross Ratio” (for example, in Fig.2 we find $CR(1, C, 3, D) = \varphi$). It is well-known that four collinear points define, in general, six cross ratio values

$$x, \frac{1}{x}, 1-x, \frac{1}{1-x}, \frac{x-1}{x}, \frac{x}{x-1} .$$

For a harmonic quadruplet there occur only three different cross ratio values, namely $x = -1, 2, \frac{1}{2}$. For a golden quadruplet we get $x = \varphi, \frac{1}{\varphi}, \varphi^2, \frac{1}{\varphi^2}, -\varphi, -\frac{1}{\varphi}$,

this means that we get only four different absolute values, and there are no other (real) cases with less than six cr-values.

Remark 1: This first example shows that it can be very fruitful to re-think traditional approaches to a topic. In case of the Golden Mean, the tradition speaks of a positive number (either $\varphi = 1.618 \dots$ or $0.618 \dots$), which is one of the solutions of a certain quadratic equation, where both solutions differ in sign. The Greek concept proportion also deals with positive numbers, while the concept ratio must consider a sign, too. The example above extends the golden ratio to a projective geometric concept.

Remark 2: The following picture (Fig.3) collects some of the classical generalisations of the Golden Mean resp. the Golden Ratio.

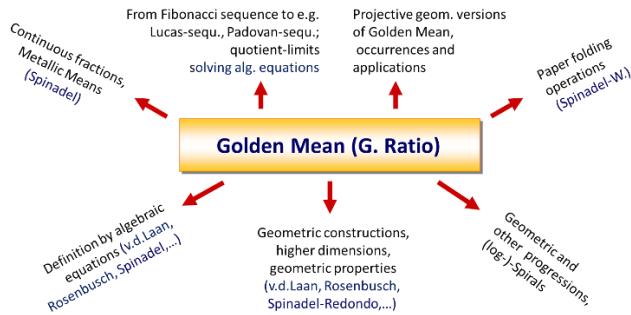


Fig. 3: Overview over generalisations of the Golden Ratio.

Fig. 3 also shows a classical way to find research topics:

- Consider a remarkable fact/figure/theorem.
- Ask, where it really belongs to, (Euclidean, affine, projective, ring geometry).
- Ask, whether there exist relatives in other classical geometries.
- What happens with the considered fact, if translated to other geometric model spaces?
- Are modifications or extensions to higher dimensions possible?
- Are there connections to other scientific disciplines and what about applications there?

References to generalisations mentioned in Fig.3 can be found e.g. in [10], [16], [17].

Remark 3: The architects van der Laan and Rosenbusch proposed a 3D-version of the Golden Mean. While van der Laan used the solution $\psi = 1.32 \dots$ of the cubic equation $x^3 - x - 1 = 0$ and called it “plastic number”, Rosenbusch

used the equation $x^3 + x - 1 = 0$ getting his “cubi ratio” $\varphi = 0.68 \dots$. Solutions of cubic equations can be found as quotient limits of Fibonacci-type sequences as well as by origami procedures. So, this viewpoint connects the topic with an actual research field. (For further properties see e.g. [16].)

Remark 4: Usually the concept “Golden Spiral” is based on bi-arcs of quarter circles within a nested set of “Golden Rectangles”. But any geometric progression with factor φ , applied to a circular arc, would give a discrete golden spiral, too. For example, circular arcs with 72° or 108° give discrete golden spirals within nested sets of regular pentagons, which, by the way, are “naturally golden”. The concept “Golden Spiral” would suit best to a logarithmic spiral $r(\alpha) = e^{k\alpha}$, $k = \varphi$.

Remark 5: The golden spiral based on quarter circles leads to the question, what about hyper-osculating quarter ellipses within a nested set of rectangles? From the condition that curvature centres of adjacent arcs must coincide one finally derives the equation $z^3 - z - 1 = 0$, which is van der Laan’s equation. The resulting spiral leads to the idea to consider C^2 -splines with conic arcs through given curvature elements, see [1] and to C^3 -splines with conic arcs, (a work in progress together with A. Gfrerrer and H. Havlicek).

3 Second example: The Theorem of Frégier

Theorem of Frégier: Given a conic c , inscribe right triangles with vertex $O \in c$, then the hypotenuses pass through a fixed point F , the “Frégier point” with respect to (c, O) ; (see Fig. 4).

Note that this is a generalization of the classical Theorem of Thales.

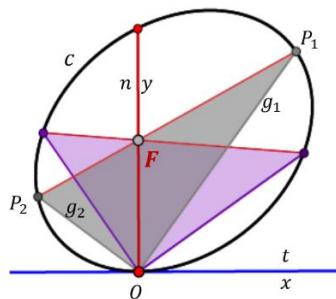


Fig. 4: Visualisation of the Theorem of Frégier.

An obvious first question is about the set $\{F\}$ for all $O \in c$. It turns out that it is a similar concentric conic. When we replace the right triangles with triangles having a fixed “angle at circumference”, the replacements f of the hypotenuses envelop a conic, too, see Fig. 5, left.

One can generalize Frégier's theorem also to higher dimensions: A 3D-version will read as follows: Intersect a quadric Φ with ortho-tripods $\{O, abc\}$, $O \in \Phi$ fixed, then the "hypotenuse planes" envelop a Frégier-point F , see [11] and Fig. 5, right.

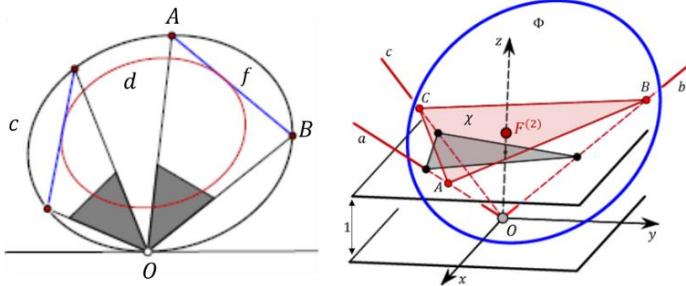


Fig. 5: Frégier-type generalisation of right triangles to general triangles (left). Visualisation of a 3D-version of Frégier's Theorem (right).

Remark 1: There are many generalisations of Thales' Theorem, see e.g. [13] and one can connect some of them also to Frégier's Theorem. For example, let the general quadric Φ mentioned above be a sphere resp. a hypersphere with diameter $d = 1$. Instead of the fixed hypotenuse $[AB]$ according to Thales consider a fixed vertex O according to Frégier. Then we find the

Result: The hypotenuse-hyperplanes of an ortho-frame with vertex $O \in \Phi$ inscribed to Φ pass through a point F , the Frégier point of O with respect to Φ , and $\text{dist}(OF) = 1/n$, see Fig. 6.

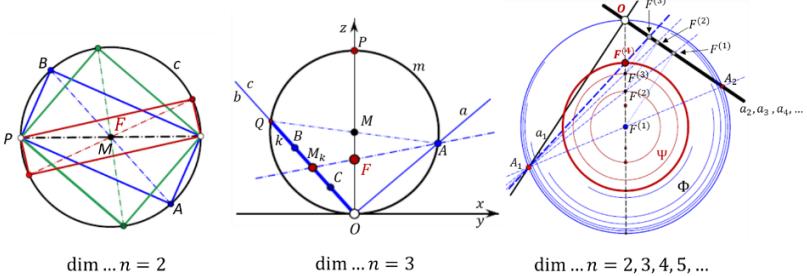


Fig. 6: Frégier's idea applied to a hypersphere Φ .

For the proof of this result use a property of the diagonal of a hypercube.

Remark 2: The ortho-schemes occurring in Remark 1 leads to consider higher dimensional versions of the Theorem of Pythagoras, see [2]. For example, if we cut off a corner of a cube (Fig. 7, left), for the surface of the resulting three-sided pyramid we get $3 \cdot F_a^2 = F_c^2$. For a general prism (Fig. 7, right) we similarly get

$\mathcal{F}_{ab}^2 + \mathcal{F}_{bc}^2 + \mathcal{F}_{ca}^2 = \mathcal{F}_{abc}^2$, but validity of this formula does not characterize an ortho-scheme, (see [2]). One might conjecture that such a Pythagoras-type formula also can be derived in higher dimensions.

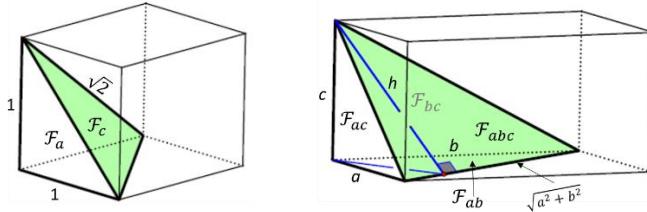


Fig. 7: A 3D-version of Pythagoras' Theorem is possible, see [2].

Remark 3: In Fig.4 the points O and F are fixed and one can consider the mapping of the point P_1 to the point P_2 by right angle hooks at O . In Fig. 4 it turns out that the conic c is mapped to itself, but one can consider such a mapping for its own and call it "Frégier mapping" φ , see [14] and Fig. 8, left.

Definition: Given points F, G in the projectively extended Euclidean plane, and in G the involution \perp of right angled lines (g, g'). The Frégier mapping φ maps a point P to $P^\varphi := (FP) \cap (GP)^\perp$.

This mapping φ is a special quadratic transformation with a degenerate exceptional triangle. It maps a line l to a conic l^φ and a conic of the pencil spanned by l and l^φ to another conic of this pencil, (Fig. 8, right).

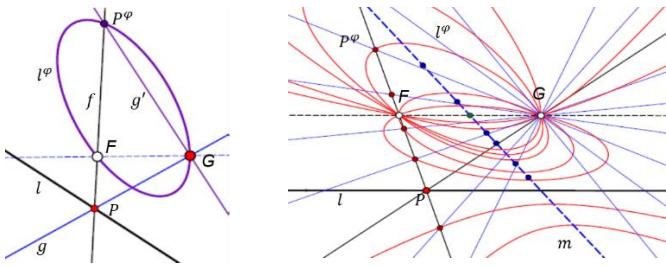


Fig. 8: The Frégier mapping applied to a line (left) and to conics of a special pencil of conics (right).

Obviously, one can replace the right-angle involution \perp at G by an elliptic or parabolic or hyperbolic projectivity and even by a polarity. Furthermore, one can consider non-Euclidean places of action as well as 3D-cases and higher order mappings, see [14]. One can consider Frégier mappings also in generally normed

planes (“Minkowski planes”), whereby \perp has to be replaced by one of the many orthogonality concepts (e.g. the non-symmetric Birkhoff orthogonality) in such a plane.

Surprisingly a well-known classical kinematic construction of a parabola as the involute of a leg of a right angle hook can be interpreted as a special case of the dualized Frégier mapping, (Fig. 9).

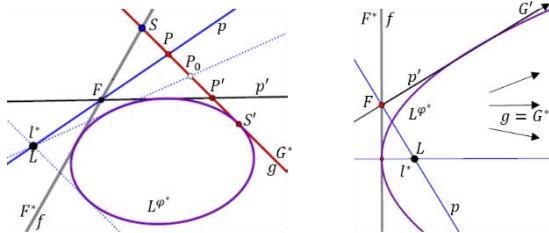


Fig. 9: The construction of a parabola (right) is a special case of a dualized Frégier mapping (left)

4 Third example: Basket arches and splines with circular bi-arcs

The medieval topic of basket arches was recently presented in a lecture focussing at architecture at a Czech-Slovak conference, and even so it was treated in earlier, didactical articles with focus on geometry, (see the references in [15]), re-considering the topic again became fruitful.

In renaissance architecture basket arches were used because of the advantage that parallel curves are basket arches, too, with the same centres, and that the e.g. door vaults can be generated by (two types) of congruent stones, (Fig. 10). One can find renaissance/baroque recipes for constructions of basket arches, but they do not show geometric insight.

While in architecture orientation of the arcs is neglected, it becomes essential for a geometry-based construction: Given two *ordered* and *oriented* line elements $(P_1, t_1), (P_2, t_2)$, construct (oriented) arcs through them, which touch each other at a transition point P_{12} with prescribed direction t_{12} .

These givens make it possible to construct a unique solution, whereby the construction tools are purely elementary geometric, see [15]. If the direction t_{12} is parallel to $P_1 \vee P_2$, then, (/with suitable orientations), P_{12} becomes the incentre of triangle $P_1 P_2 S$, ($S = t_1 \cap t_2$), Fig. 11, left. If the given line elements are vertices and vertex tangents of an ellipse (Fig. 11, right), the basket arch with this special transition point is best approximating the ellipse.

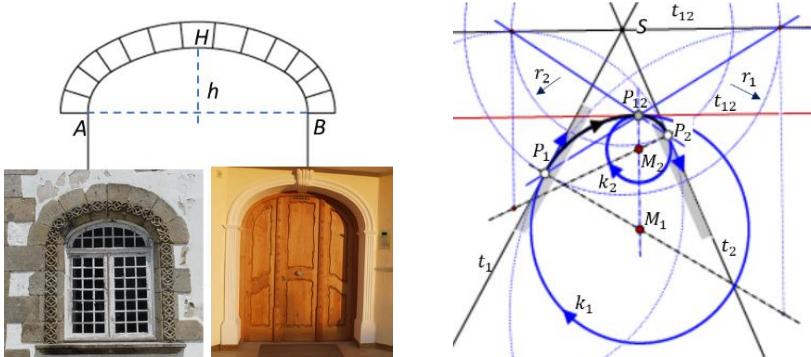


Fig. 10: The principle of basket arches (left) and the construction by interpretation as C^1 -spline of circular arcs (right).

While in architecture orientation of the arcs is neglected, it becomes essential for a geometry-based construction: Given two *ordered* and *oriented* line elements (P_1, t_1) , (P_2, t_2) , construct (oriented) arcs through them, which touch each other at a transition point P_{12} with prescribed direction t_{12} .

These givens make it possible to construct a unique solution, whereby the construction tools are purely elementary geometric, see [15]. If the direction t_{12} is parallel to $P_1 \vee P_2$, then, (with suitable orientations), P_{12} becomes the incentre of triangle $P_1 P_2 S$, ($S = t_1 \cap t_2$), Fig. 11, left. If the given line elements are vertices and vertex tangents of an ellipse (Fig. 11, right), the basket arch with this special transition point is best approximating the ellipse.

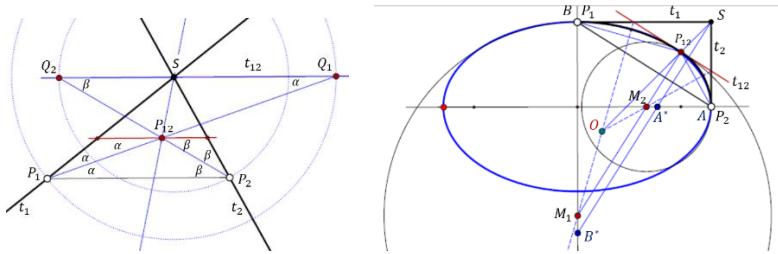


Fig. 11: The incentre of triangle $P_1 P_2 S$ is a transition point (left), optimal approximation of an ellipse (right).

Even so the authors of [15] could not find hints, how arcs in Islamic architecture were constructed, the “incentre-case” delivers very good approximations of such arcs, see Fig. 12.

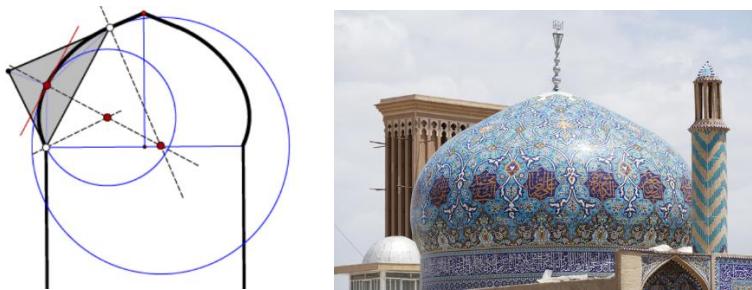


Fig. 12: The “incentre-case” applied to Islamic Architecture.

5 Fourth example: Polyhedrons with the setsquare

This a topic, which aims at being applied in high school geometry or maths courses. It is due to an oral communication with Daniel Willie Rodrigues (2020, Brasil). In an e-mail he wrote that he designed an equifaced octahedron the faces of which are isosceles right triangles and that its diagonals have relations with the Golden Mean, see Fig. 13.

What about a classroom task, eight pupils making this octahedron with their – hopefully – congruent standard setsquares? (The only additional needs are some adhesive tapes.)

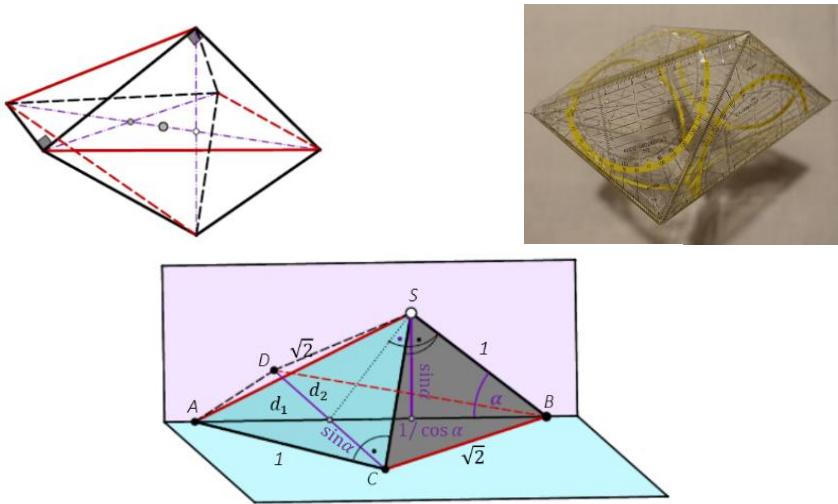


Fig. 13: The “Rodrigues-octahedron” with congruent isosceles right triangles.

This is a playground with some systematics and many aha-moments, and it is offside the beaten track about Platonic solids. If one starts e.g. with a cupola over

a triangle, a square or a pentagon, one can add these objects to the faces of platonic solids or simply glue them together with a reflected cupola. One can build antiprisms and even helical polyhedrons and, within limits, movable Möbius stripes, see [12] and Fig. 14.

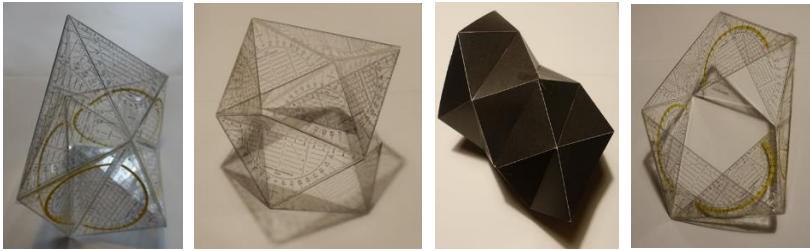


Fig. 14: Examples of polyhedrons with congruent setsquare faces.

6 Fifth example: Movable “stellae octangulae”

In 1988 H. Stachel discussed the motions of a pair of regular tetrahedrons such that the edges of one slide along the edges of the other, ([7]), Fig. 15). He found that there is even a two-parameter freedom for these motions.

67

Figures from H.Stachel's paper

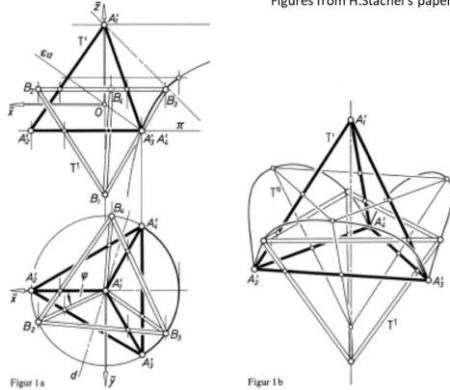


Fig. 15: Motion of one tetrahedral part of a stella octangula against the other.

Here arises the question, whether the regularity of the stella octangula is essential. Are there other pairs of then necessarily indirect congruent tetrahedrons, which allow at least a one-parametric set of motions? It turns out that equifaced tetrahedrons, - they form in the start position a stella octangular with a prism as convex hull -, are candidates for such movable pairs of tetrahedrons, see Fig. 16. Here the pairs of edges are generators of hyperboloids of revolution. Rotation of

one tetrahedron around the axis of such a hyperboloid transforms intersecting pairs of generators into intersecting generators. The analysis of this still special case and the general cases is ongoing research.

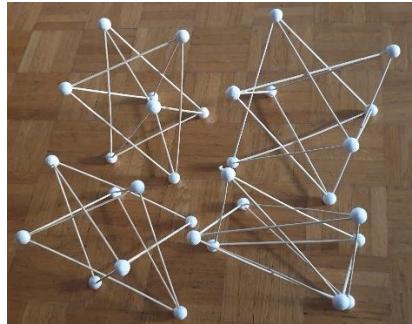


Fig. 16: Candidates for movable stellae octangulae.

7 Sixth example: The Theorem of Simson-Wallace

One can find this theorem in books on Elementary Geometry, and there are already many references concerning generalisations, see e.g. [3],[4],[5], [6], [9]. The following considerations were stimulated by a lecture of B. Odehnal (22nd Coll. on Geom. & Graphics 2021, Čiovo, Croatia).

The original Theorem of Simson-Wallace (SW-theorem) reads as follows (see e.g. [18] and Fig. 17, left):

Theorem of Simson-Wallace (1799): Given a triangle ABC in the Euclidean plane π , then the pedal points with respect to a point $P \in \pi$ on the sides AB, BC, CA are collinear, if and only if P is a point on the circumcircle of ABC .

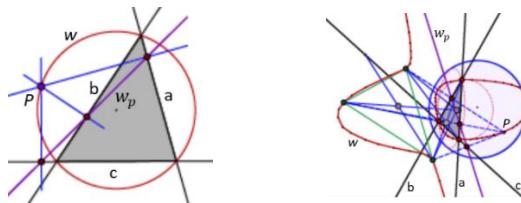


Fig. 17: Visualisation of the SW-theorem in the Euclidean plane (left) and in the hyperbolic plane (right).

Here one observes that

- The formulation of the SW-theorem uses the misleading term “triangle” instead of “trilateral”.
- Three points are collinear, if a certain determinant vanishes. By using the projectively enclosed Euclidean plane as place of action together with

homogeneous coordinates this gives an equation of degree three. Its solution is the well-known circumcircle plus the ideal line of the plane! For example, the hyperbolic-geometric version of the SW-locus is indeed an irreducible cubic of genus 1, (Fig. 17, right).

- c) Special cases of the given trilateral were never studied. It turns out that the ideal line then can count (at least) twice and that, for three given lines through a common proper point, this point W is even a SW-locus component of dimension 0, (Fig. 18.).

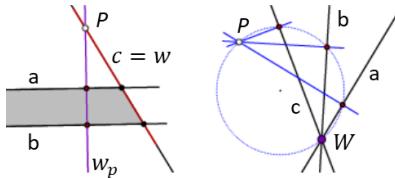


Fig. 18: The SW-locus for two special cases of triplets a, b, c .

Even so there exist already many generalisations of the SW-Theorem concerning higher dimensions and other geometries (including metric spaces, see References), a systematic study for SW-loci for n lines in the (projectively extended) Euclidean plane is still missing. Here occurs a wide field of interesting open questions waiting for answers. The following table 1 might give a hint, how such a systematic treatment could proceed:

$n=3$	Classical SW-theorem $\det = 0$ (and $\det = \text{const}$)	SW-locus = circumcircle + ideal line
$n=4$	a) Intersection of 4 circumcircles..	Miquel point, focus of unique parabola
	b) 4 concyclic pedal points.....	SW-locus = cubic of genus 1 + ideal line
$n=5$	a) 5 Miquel points	\Rightarrow Theorems of S. Kantor, Ch. J. Hsu, K. Hirano ??? open problem ??? open problem
	b) Intersection of 5 SW-cubics	
	c) 5 pedal points on a parabola	
$n=6$	a) Set of Miquel points	\Rightarrow Theorems of S. Kantor, Ch. J. Hsu, K. Hirano ??? open problem
	b) Configuration of 30 SW-cubics...	
	c) Configuration of 6 SW-loci of type $n=5, c$	
	d) 6 pedal points on a conic	??? open problem \Rightarrow SW-locus in general of degree 12
$n=7$	e.g. 7 pedal points on a strophoid	??? open problem

Table 1: Proposal of a systematic study of SW-Loci for n lines

Remark: In the lecture of B. Odehnal mentioned above he presented the following result: The SW-locus for a complete quadrangle such that the pedal points belong to a conic is a curve of 7th order. The degree reduction is caused by the fact that the ideal line is a priori a component of the SW-locus and, as four times there are three lines through a point (see Fig.18), this reduces the degree by four in addition.

8 Conclusion

In spite there are still many other topics one could have mentioned, the idea how to find interesting research problems hopefully could be shown by the preceding examples. Furthermore, the presentation aims also to show that “Computer Aided Theorem Proving”, which indeed makes sure that a conjectured fact is true, rarely tells us, *why* it is true. There also come no hints how to generalise the considered fact or to find connections with other topics. Via synthetic reasoning one can get a closer view to the “why” as well as a wider view to connect the fact with other facts.

Final remark and acknowledgement: The author is deeply indebted to his geometer-friends all over the world for continuous support, stimulating discussions, and for sharing their ideas and knowledge with him.

References

- [1] A. Gfrerrer, G. Weiss. *Osculating Conic Biarcs*, CAGD Computer Aided Geom. Design. 81 (2020). DOI: 10.1016/j.cagd.2020.101904.
- [2] J. Kofler, H. Dirnböck: *Der dreidimensionale Pythagoras*. Festschrift zum 100. Geburtstag von Dr. Hans Gollmann, Graz 2002
- [3] E. Molnár, P. Pech, J. Szirmai: *Simson–Wallace locus in d-dimensional projective-metric space*, Journal of Geometry, Vol. 108 (2017)/07/01 DO - 10.1007/s00022-016-0346-y
- [4] P. Pech: *Extension of Simson–Wallace Theorem on Skew Quadrilaterals and Further Properties*. DO - 10.1007/978-3-319-21362-0, ISBN - 978-3-319-21361-3, (2015)/07/18
- [5] P. Pech: *On a 3D extension of the Simson-Wallace theorem*, Journal for Geometry and Graphics Vol. 18(1) (2014), pp. 205-215
- [6] P. Pech, *On the Simson-Wallace Theorem and its Generalizations*, Journal for Geometry and Graphics, Vol. 9(1) (2005), pp.141-153.
- [7] H. Stacheler: Ein bewegliches Tetraederpaar, Elem. d. Math. 43(1988), pp. 65-75
- [8] G. Weiss: *Golden Hexagons*, JGG Vol.6 (2002), No. 2, pp. 165-180
- [9] G. Weiss G.: *Bodenmüller, Wallace-Simson and more*. Proceedings of the Slovak-Czech conference on Geometry 2015, Terchová, Slovakia. ISBN 978-80-227-4479-9, pp.45-60
- [10] G. Weiss: *From the Golden Rectangle to the LAAN Box and more*. J. of Math. & Design, Vol 12 (2013/14) ISSN 1515-7881, pp. 75-94

- [11] G. Weiss: *Frégier Points Revisited*. Proc. of the Czech-Slovak Conf. on Geom. & Graphics 2018, Blansko, Czech Rep., pp.269-278
- [12] Weiss, G.: *Modellbau mit dem Geodreieck*. IBDG, Vol. 39(2), 2020, pp. 20-26
- [13] G. Weiss, F. Gruber: Den Satz von Thales verallgemeinern - aber wie?, KoG 12 (2008), pp.7-18
- [14] G. Weiss, P. Pech: *A quadratic mapping related to Frégier's Theorem and some generalisations*. JGG, Vol. 25 (20212), No. 1, pp. 127-137.
- [15] G. Weiss, K. Meirer: *Vom Korbogen zum Neunpunkte-Kreis*. IBDG, Vol. 39(2), 2020, pp. 47-55
- [16] G. Weiss, V.W. de Spinadel: *From George Odom to a new system of Metallic Means*. Journ. of Math. & Design, Vol 13 (2014) ISBN 978-987-27417-2-3, pp. 75-94)
- [17] G. Weiss, V.W. de Spinadel: *The Mean Values of van der Laan and Rosenbusch and their Origami Constructions*, Journal of Math. & Design, Vol 13 (2014) ISBN 978-987-27417-2-3, pp. 75-94)
- [18] https://en.wikipedia.org/wiki/Simson_line

CONTRIBUTED TALKS

Curves of Tschirnhaus Type – Brief Commentary on Interpolations

Michal Bizzarri, Miroslav Lávička, Jan Vršek

*Department of Mathematics & NTIS, Faculty of Applied Sciences,
University of West Bohemia, Univerzitní 8, 301 00 Plzeň, Czech Republic
{bizzarri, lavicka, vrsekjan}@kma.zcu.cz*

Abstract. Recently, a class of polynomial curves which are, in some sense, a generalization of the famous Tschirnhaus Pythagorean hodograph (PH) cubic was presented and discussed in [1]. Although the research was mostly theoretical as applications of PH curves of Tschirnhaus type are as limited as in the case of the cubic, certain interpolation procedures can be formulated when biarcs are used. For instance, the C^1 or C^2 joints can be easily expressed in the “language of generating triangles” and the corresponding computational formulas possess a simple form.

Keywords: Pythagorean hodograph curves, Tschirnhaus curves, Hermite interpolation

1 Introduction

A planar polynomial parametric curve $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ with the hodograph $\mathbf{h}(t) := \mathbf{x}'(t) = (x'(t), y'(t))$ is a *Pythagorean-hodograph* curve (shortly *PH* curve) if the components of its hodograph curve $\mathbf{h}(t)$ fulfill the condition

$$\|\mathbf{h}(t)\|^2 = x'(t)^2 + y'(t)^2 = \sigma(t)^2, \quad (1)$$

where $\sigma(t) \subset \mathbb{R}[t]$. Their parametric speed is polynomial, which is an important property, e.g., for formulating efficient real time interpolator algorithms for CNC machines. Another distinguished feature is that they possess rational offsets. For more details see e.g. [3, 2, 4] and references therein.

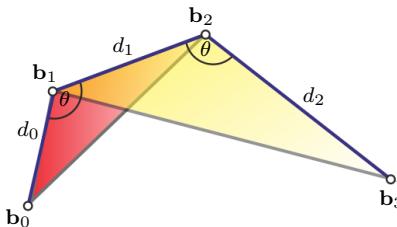


Figure 1: Control polygon of the Tschirnhaus PH cubic.

It is a well known fact that there exists only one planar PH cubic – the so called *Tschirnhaus cubic*, see [2]. Considered as a Bézier curve given by the control polygon with four vertices then it is easy to identify it within the family

of all cubics, in particular it must hold

$$d_1^2 = d_0 d_2 \quad \text{and} \quad \theta_1 = \theta_2, \quad (2)$$

where d_0, d_1, d_2 are the lengths of the control polygon legs, and θ_1, θ_2 are the control polygon angles at the interior vertices b_1, b_2 , see Fig. 1. Clearly, this property says nothing else than that the control polygon is constructed using two similar triangles $\triangle b_0 b_1 b_2 \sim \triangle b_1 b_2 b_3$ (red and yellow triangles in Fig. 1).

2 Curves of Tschirnhaus type and their properties

We continue with the construction mentioned in the previous section. We take a triangle and glue its $n - 1$ suitably scaled copies together to obtain a control polygon of a degree n Bézier curve

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=0}^n \mathbf{b}_k B_k^n(t), \quad (3)$$

$t \in [0, 1]$. Thus we get a curve of “Tschirnhaus-cubic-type”, shortly a *curve of Tschirnhaus type*. The construction of the control polygons based on gluing together the similar triangles is nothing else than the successive and repetitive application of rotation by the angle $\varphi = \pi - \theta \in (-\pi, \pi)$ and scaling given by the factor $\lambda \in \mathbb{R}^+$. This can be expressed via the formula

$$\mathbf{b}_{k+1} - \mathbf{b}_k = \left[\lambda \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \right]^k \mathbf{v}, \quad i = 0, \dots, n-1. \quad (4)$$

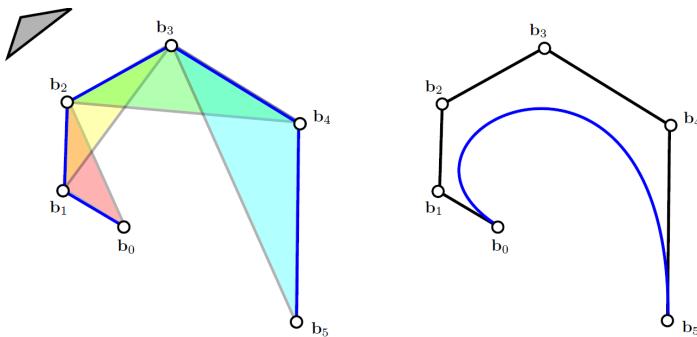


Figure 2: Control polygon of the Tschirnhaus quintic.

In what follows, we will use the complex representation, i.e., we identify $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ with $\mathbf{a} = a_1 + a_2\mathbf{i} \in \mathbb{C}$. Then the control points are

$$\mathbf{b}_k = \mathbf{b}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} z^j \mathbf{v}, \quad \text{where } z = \lambda e^{\varphi \mathbf{i}} (\lambda = |z|, \varphi = \arg z), \quad (5)$$

and $\mathbf{v} \in \mathbb{C}$, $\mathbf{v} \neq 0$. Clearly, the shape of the fundamental triangle is uniquely determined by \mathbf{v} and $z = \lambda e^{\varphi \mathbf{i}}$. Next, as it holds $\sum_{j=0}^{k-1} z^j = (z^k - 1)/(z - 1)$, we arrive at

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=0}^n \left(\mathbf{b}_0 + \frac{z^k - 1}{z - 1} \mathbf{v} \right) B_k^n(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{v} \sum_{k=1}^n \frac{z^k - 1}{z - 1} B_k^n(t). \quad (6)$$

For the sake of brevity we only recall some fundamental results from [1]. The readers more interested in this topic (including proofs) are kindly referred to the primary source.

First, it can be proved that the PH property of the Tschirnhaus cubic is not exceptional:

Lemma 2.1 *All Tschirnhaus curves of odd degree are polynomial PH curves.*

Let us stress out that the PH property of curves of Tschirnhaus type does not depend on the shape of the fundamental triangle. Moreover, the curves of Tschirnhaus type of even degree can also be reparameterized to Pythagorean hodograph curves, although to rational ones only. This generalizes the well known property of parabola.

Corollary 2.2 *All curves of Tschirnhaus type admit rational offsets.*

The curvature of the curve of Tschirnhaus type is computed as

$$\kappa(t) = \frac{\operatorname{Im} \left[\overline{h(t)} h'(t) \right]}{|h(t)|^3} = \frac{(n-1)\lambda \sin \varphi}{n|\mathbf{v}| \left[(1-t)^2 + 2\lambda t(1-t) \cos \varphi + \lambda^2 t^2 \right]^{\frac{n+1}{2}}}, \quad (7)$$

and when looking for the extremal points of $\kappa(t)$, i.e., we consider t such that $\kappa'(t) = 0$, we find only one stationary point determined by the parameter

$$t_0 = \frac{1 - \lambda \cos \varphi}{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi}, \quad (8)$$

which is a local maximum of curvature.

Lemma 2.3 *All curves of Tschirnhaus type possess exactly one vertex.*

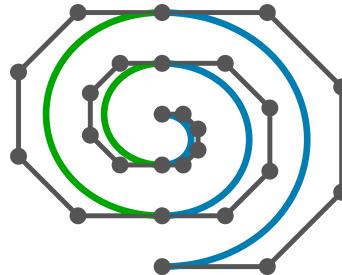


Figure 3: A PH spiral composed of five arcs of curves of Tschirnhaus type with monotone curvature.

It also useful to address the winding number of the degree n Tschirnhaus curve (6) defined on $[0, 1]$, in particular by direct computation we arrive at

$$\eta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \kappa(t)|h(t)| dt = \frac{(n-1)\varphi}{2\pi}. \quad (9)$$

At this place we would like to recall the so called *PH spirals*. We mention the spiral property with respect to all curves of Tschirnhaus type, generated as planar Bézier curves (4) – see Fig 3.

Finally, it can be proved that for each n there exists only one curve of Tschirnhaus type modulo similarities. As known, for $n = 2$ one obtains the Bézier curve which is a parabola and all parabolas are similar. The same holds for cubics and for two suitable glued triangles (also all Tschirnhaus cubics are similar). The next theorem shows that this property is again general as all Tschirnhaus curves of degree n can be transformed via suitable reparameterization and similarity to the canonical form.

Theorem 2.4 *For any fixed $n \geq 2$, there exists only one degree n curve of Tschirnhaus type up to similarities.*

The canonical parameterizations of Tschirnhaus curves of degree n (obtained for $b_0 = 0$, $v = i$ and $z = 1 + i$) are

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (it)^k. \quad (10)$$

The interesting shapes of these curves for some degrees are presented in Fig. 4.

3 Note on interpolations with Tschirnhaus curves

As stated before applications of PH curves of Tschirnhaus type are as limited as in the case of the cubic. They do not admit inflections and moreover e.g. for C^1

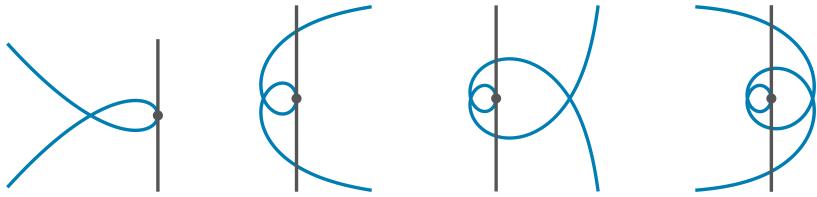


Figure 4: Topology of Tschirnhaus curves of degree n (for $n = 3, 4, 5, 6$ from left to right). The curves were scaled appropriately.

Hermite data it is necessary to use biarcs. On the other hand, the C^1 or C^2 joints can be easily expressed in the “language of generating triangles” as illustrated in Fig. 5 for the C^2 joint.

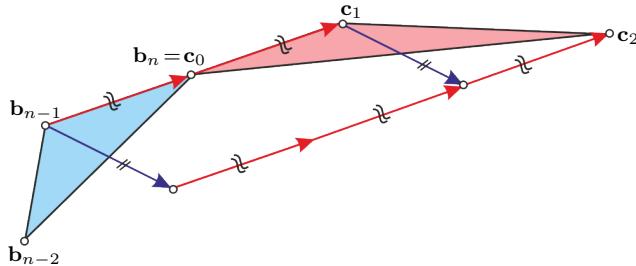


Figure 5: Two generating triangles for the C^2 joint.

Example 3.1 Let be given C^1 Hermite data $\{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1; \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1\}$, where $\mathbf{p}_0 = (0, 0)$, $\mathbf{p}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{t}_0 = (1/2, 1)$, $\mathbf{t}_1 = (1/3, -2/3)$. Construct a Tschirnhaus-curve-biarc interpolating this data.

The conditions for the C^1 joint of two degree n curves of Tschirnhaus type $\mathbf{b}(t) = v_b \sum_{k=0}^n \frac{z^k - 1}{z - 1} B_k^n(t)$, $\mathbf{c}(t) = v_c \sum_{k=0}^n \frac{w^k - 1}{w - 1} B_k^n(t)$, $t \in [0, 1]$, are

$$\mathbf{c}_0 = \mathbf{b}_0 + \frac{z^n - 1}{z - 1} v_b, \quad v_c = z^{n-1} v_b. \quad (11)$$

In addition, given C^1 Hermite data are incorporated as follows

$$\mathbf{b}_0 = \mathbf{p}_0, \quad \mathbf{c}_n = \mathbf{p}_1, \quad v_b = \frac{\mathbf{t}_0}{n}, \quad w^{n-1} v_c = \frac{\mathbf{t}_1}{n}. \quad (12)$$

This yields

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 = \left(\mathbf{c}_0 + \frac{w^n - 1}{w - 1} v_c \right) - \mathbf{b}_0 = \frac{z^n - 1}{z - 1} v_b + \frac{w^n - 1}{w - 1} z^{n-1} v_b,$$

i.e.,

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} + \frac{w^n - 1}{w - 1} z^{n-1} = \frac{n(p_1 - p_0)}{t_0}; \quad (13)$$

and

$$w^{n-1} z^{n-1} \frac{t_0}{n} = \frac{t_1}{n},$$

i.e.,

$$(zw)^{n-1} = \frac{t_1}{t_0}. \quad (14)$$

Solving system of equations (13) and (14) for unknowns z, w gives a sought solution. Unfortunately the non-linear nature of the system complicates any discussion of number of solutions. Discussion can only be done for low degrees, e.g. for $n = 3$ the closed form formulas can be found.

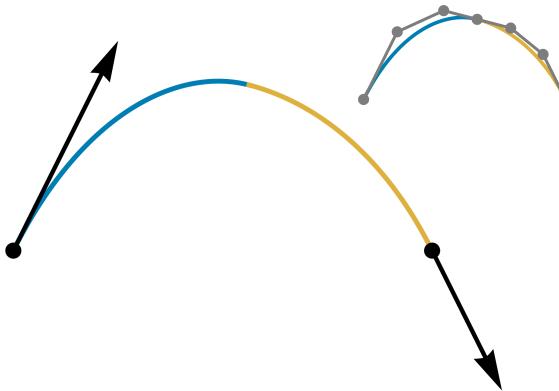


Figure 6: A Tschirnhaus-curve-biarc (in this case for $n = 3$) interpolating C^1 Hermite data from Example 3.1.

Although the Tschirnhaus curves do not offer enough flexibility for C^2 Hermite interpolations, it is still possible to interpolate G^2 data, i.e., points, tangents and curvatures.

Example 3.2 Consider G^2 Hermite data $\{p_0, p_1; t_0, t_1; \kappa_0, \kappa_1\}$, where $p_0 = (0, 0)$, $p_1 = (-5, 3)$, $t_0 = (0, 1)$, $t_1 = (-1, -1)$, $\kappa_0 = 2/3$, $\kappa_1 = 4/3$. Construct a Tschirnhaus-curve-biarc interpolating this data.

We again have two degree n curves of Tschirnhaus type $b(t) = v_b \sum_{k=0}^n \frac{z^k - 1}{z - 1} B_k^n(t)$, $c(t) = v_c \sum_{k=0}^n \frac{w^k - 1}{w - 1} B_k^n(t)$, $t \in [0, 1]$ with $z = \lambda e^{i\varphi}$, $w = \mu e^{i\psi}$ and it holds

$$v_b = \alpha T_0, v_c = \beta T_0 \left(\frac{z}{\lambda} \right)^{n-1}, T_0 = \frac{t_0}{|t_0|}, T_1 = \frac{t_1}{|t_1|}. \quad (15)$$

Considering formula for curvature (7), the interpolation conditions can be rewritten into the form

$$\begin{aligned} \arg \frac{T_1}{T_0} &= (n-1)(\varphi + \psi), \\ \frac{\kappa_0}{\kappa_1} &= (\lambda\mu)^{n+1}, \\ (p_1 - p_0) \frac{n}{(n-1)T_0} &= \frac{z^n - 1}{z - 1} \frac{\Im(z)}{\kappa_0} + \frac{w^n - 1}{w - 1} \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{n-1} \frac{\Im(w)}{\kappa_1 \mu^{n+1}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Solving system of equations (16) for unknowns z, w (or equivalently $\lambda, \mu, \varphi, \psi$) gives a sought solution. In addition, we have

$$\alpha = \frac{n-1}{n} \frac{\Im(z)}{\kappa_0}, \quad \beta = \frac{n-1}{n} \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{n-1} \frac{\Im(w)}{\kappa_1 \mu^{n+1}}. \quad (17)$$

Unfortunately the highly non-linear nature of this system complicates again any discussion of solvability or number of solutions. Fig. 7 shows a solution with quintics.

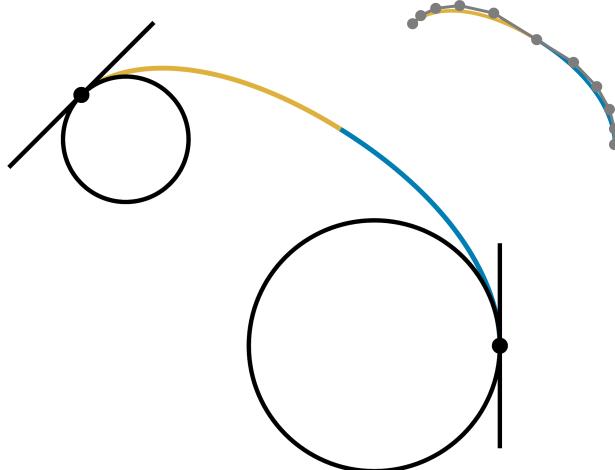


Figure 7: A Tschirnhaus-curve-biarc (in this case for $n = 5$) interpolating G^2 Hermite data from Example 3.2.

4 Conclusion

Although interpolations with PH curves of Tschirnhaus type are as limited as in the case of the well known PH cubic, certain interpolation procedures can be formulated when biarcs are used. In this paper we shortly presented these

recently introduced shapes including their properties, and show certain steps to solving C^1 and G^2 Hermite interpolations. Nonetheless, a thorough discussion of the formulated approaches is a goal for our future research. More details can be found in [1].

Acknowledgments

The authors were supported by the grant 21-08009K *Generalized Symmetries and Equivalences of Geometric Data* of the Czech Science Foundation.

References

- [1] M. BIZZARRI, A. A ÁVI ÁCKA, AND A. VR ÁSEK, *Aote An Alanar pythagorean hodograph curves Af Aschirnhaus Aype*, A computer Aided Geometric Design, A9 A2021), A. A. Ad/No A02022.
- [2] R. FAROUKI, *Pythagorean-Hodograph Curves: Algebra and Geometry In-separable*, Springer, 2008.
- [3] R. FAROUKI AND T. SAKKALIS, *Pythagorean hodographs*, IBM Journal of Research and Development, 34 (1990), pp. 736–752.
- [4] R. T. FAROUKI, C. GIANNELLI, AND A. SESTINI, *New Developments in Theory, Algorithms, and Applications for Pythagorean–Hodograph Curves*, in Advanced Methods for Geometric Modeling and Numerical Simulation, C. Giannelli and H. Speleers, eds., Springer International Publishing, 2019, pp. 127–177.

A Note on the Structure of the Intersection Multiplicity of Two Plane Curves

Adriana Bosáková, Pavel Chalmovianský

*Faculty of Mathematics, Physics and Informatics,
Comenius University in Bratislava*

Mlynská Dolina, Bratislava, Slovakia

adriana.bosakova@fmph.uniba.sk, pavel.chalmoviansky@uniba.sk

Abstract. Intersection multiplicity is an invariant in algebraic geometry, which describes the complexity of an intersection of algebraic varieties. Studying its internal structure can help us to describe the algebraic and geometric properties of such an intersection. We focus on the case of the intersection of two plane affine algebraic curves. By known results, the intersection multiplicity at a point is greater or equal to $mn + t$, where m and n are the multiplicities of the intersection point on individual curves and t is the number of their common tangents at this point. In this paper we show an improved version of this result.

Keywords: plane algebraic curves, intersection multiplicity, tangent

1 Introduction

Let k be an algebraically closed field. For a nonconstant polynomial $F \in k[x, y]$, we define the plane algebraic curve (curve) as the equivalence class $\{\lambda F; \lambda \in k, \lambda \neq 0\}$. Such a curve can be represented as a subset of the affine plane \mathbb{A}_k^2 , the set $\{P = (p_x, p_y) \in \mathbb{A}_k^2 \mid F(P) = 0\}$. With abuse of notation, we use the same capital letter F for both the polynomial and the curve it defines.

In this paper we focus on the local properties of curves in a suitable neighborhood of the origin $O = (0, 0)$. If we need to inspect these properties at a point different from the origin, we can use a suitable change of coordinates and proceed the same way.

Each polynomial can be written as a sum of its homogeneous parts. Therefore we can write F as

$$F = F_m + F_{m+1} + \cdots + F_r, \quad (1)$$

where F_i is either homogeneous of degree i , or equal to zero and $F_m \neq 0$ (i.e. F_m is the nonzero homogeneous part of F of the smallest degree). The number m is called the multiplicity of the point $O = (0, 0)$ on the curve F . Since k is algebraically closed, the homogeneous polynomial F_m can be written as a product of m (not necessarily distinct) linear polynomials. These represent the tangents of F at O . By \mathcal{O} , we denote the local ring of the affine plane \mathbb{A}_k^2 at the origin.

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_{k^2, O} = \left\{ \frac{F}{G}; F, G \in k[x, y]; G(O) \neq 0 \right\}. \quad (2)$$

Even though we work over algebraically closed field k , all the figures in this paper illustrate the curves for $k = \mathbb{C}$, where only the real plane is shown.

Example 1. Let F be the curve defined by the polynomial $F = x^3 - xy^2 - x^4 - x^2y^2 - y^4$. If we write this polynomial as a sum of its homogeneous parts, we get

$$F = [x^3 - xy^2] + [-x^4 - x^2y^2 - y^4] = F_3 + F_4. \quad (3)$$

In this case $m = 3$, which means that O is a triple point of this curve. If we write F_3 as a product of its linear factors, we get

$$F_3 = x^3 - xy^2 = x(x - y)(x + y), \quad (4)$$

so the tangents of F at O are the three lines $x = 0$, $x - y = 0$ and $x + y = 0$.

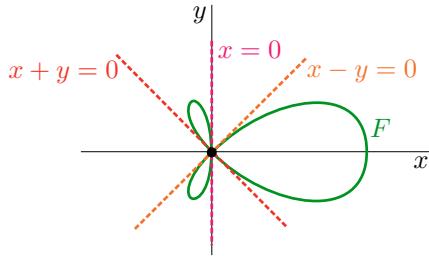


Figure 1: The curve F and its three tangents at the origin.

2 Intersection multiplicity

Let F and G be two plane curves. The intersection multiplicity of F and G at the point $O = (0, 0)$ is defined as

$$I_O(F, G) = \dim_k(\mathcal{O}/(F, G)), \quad (5)$$

where $\dim(\mathcal{O}_k/(F, G))$ is the dimension of $\mathcal{O}/(F, G)$ as a vector space over k .

Intersection multiplicity is an invariant in the algebraic geometry describing the complexity of an intersection. More about its properties and equivalent definitions can be found at [2], [3], [4]. Generalizations using sheaves and schemes can be found at [5], [6], [7].

3 Local Bézout theorem

From now on, let F and G be two curves defined by the polynomials

$$F = F_m + F_{m+1} + \cdots + F_r, \quad (6)$$

$$G = G_n + G_{n+1} + \cdots + G_s, \quad (7)$$

where $F_m \neq 0$, $G_n \neq 0$. By the local Bézout theorem [2], the intersection multiplicity satisfies the inequality

$$I_O(F, G) \geq mn. \quad (8)$$

This result was later improved to the inequality

$$I_O(F, G) \geq mn + t, \quad (9)$$

where t is the number of common tangents of F and G at O (counted with multiplicity). This is just the number of linear factors F_m and G_n have in common and therefore can be calculated as $t = \deg(\gcd(F_m, G_n))$. The proof of (9) can be found at [1] and is based on study of curves and their local decomposition into branches.

Example 2. Let F and G be two curves defined by the polynomials

$$F = x^3 - y^7, \quad (10)$$

$$G = x^5 - y^{11}. \quad (11)$$

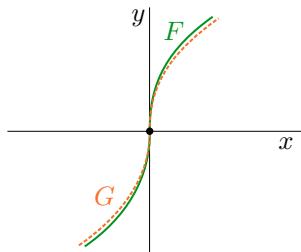


Figure 2: The curve F (solid) and G (dashed)

Obviously, $m = 3$ and $n = 5$. Since $F_3 = x^3 = x \cdot x \cdot x$, the curve F has three tangents at O , all of them defined by the equation $x = 0$. Similarly, the curve G has five tangents at O , all of them defined by the equation $x = 0$. The number of their common tangents (counted with multiplicity) at O is

$$t = \deg(\gcd(x^3, x^5)) = \deg(x^3) = 3. \quad (12)$$

By the inequality (9), we know that

$$I_O(F, G) \geq 3 \cdot 5 + 3 = 18. \quad (13)$$

In the next section, in the Proposition 4.1, we show an improvement to this estimate and demonstrate it on the same pair of curves in the Example 4.

4 Results

Proposition 4.1. Let F and G be two plane curves defined by the polynomials

$$F = F_m + F_{m+1} + \cdots + F_r, \quad (14)$$

$$G = G_n + G_{n+1} + \cdots + G_s, \quad (15)$$

where $F_m \neq 0$, $G_n \neq 0$. Then

$$I_O(F, G) \geq mn + t_0 + t_1 + t_2 + \cdots, \quad (16)$$

where

$$t_i = \deg(\gcd(F_m, \dots, F_{m+i}, G_n, \dots, G_{n+i})). \quad (17)$$

Note, that $t_0 = \deg(\gcd(F_m, G_n))$ and therefore equal to t from (9). The full proof of this proposition is beyond the length of this paper. It is based on the system of vector spaces and linear maps, whose dimensions are related to the dimension of the vector space $\mathcal{O}/(F, G)$. This will be fully explained in further publications.

Remark. The main purpose of this result is not to find the exact value of the intersection multiplicity. There are existing algorithms for its computation, these can be found for example in [2]. These algorithms can get quite complicated computation-wise for certain pair of curves. In these cases, our result can be helpful as a simple quick estimate.

The main motivation behind this result is to understand more about the internal structure of the intersection multiplicity and to connect it to the algebraic and geometric properties of the individual curves and their intersection.

Example 3. Let F and G be two curves defined by the polynomials

$$F = x^2(x - y)(x + y) + x^2(x - y)y^2 + y^6, \quad (18)$$

$$G = x^2(x - y)^2(x + y) - y^7. \quad (19)$$

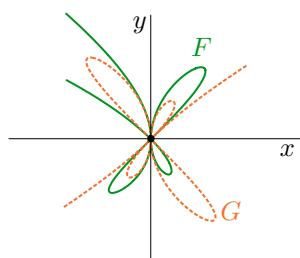


Figure 3: The curve F (solid) and G (dashed)

Then $m = 4$, $n = 5$. We write both polynomials F and G as the sums of their homogeneous parts. The polynomial G has no terms of degree 6, but for the purposes of our estimate, we include also the homogeneous polynomial G_6 , which is equal to 0. Hence,

$$\begin{aligned} F &= [x^2(x-y)(x+y)] + [x^2(x-y)y^2] + [y^6], \\ &= F_4 + F_5 + F_6, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} G &= [x^2(x-y)^2(x+y)] + [0] + [-y^7], \\ &= G_5 + G_6 + G_7. \end{aligned} \quad (21)$$

Now, we can calculate the t_i ($i = 0, \dots, \infty$).

$$\begin{aligned} t_0 &= \deg(\gcd(F_4, G_5)) = \\ &= \deg(\gcd(x^2(x-y)(x+y), x^2(x-y)^2(x+y))) = \\ &= \deg(x^2(x-y)(x+y)) = 4, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} t_1 &= \deg(\gcd(F_4, F_5, G_5, G_6)) = \\ &= \deg(\gcd(x^2(x-y)(x+y), x^2(x-y)y^2, x^2(x-y)^2(x+y), 0)) = \\ &= \deg(x^2(x-y)) = 3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_2 &= \deg(\gcd(F_4, F_5, F_6, G_5, G_6, G_7)) = \\ &= \deg(\gcd(x^2(x-y)(x+y), x^2(x-y)y^2, -y^6, x^2(x-y)^2(x+y), 0, -y^7)) = \\ &= \deg(1) = 0. \end{aligned}$$

Since $t_2 = 0$, we know from the definition, that $t_i = 0$ for all $i > 2$. This gives us the estimate for the intersection multiplicity of F and G ,

$$I_O(F, G) \geq mn + \sum t_i = 20 + 4 + 3 = 27. \quad (23)$$

Using known algorithms, we can calculate that in this case, $I_O(F, G) = 27$. Here, our estimate gave the exact result. This does not happen for every pair of curves (as shown in the Example 4).

Remark. In general, the number of integers t_i , which are nonzero can be possibly infinite, which would result into $I_O(F, G) \geq \infty$. However, such case happens only if all the homogeneous parts of both curves F and G are divisible by some homogeneous polynomial L_d (of degree $d \geq 1$). Then

$$F = L_d F'_{m-d} + L_d F'_{m-d+1} + \cdots + L_d F'_{r-d} = L_d F', \quad (24)$$

$$G = L_d G'_{n-d} + L_d G'_{n-d+1} + \cdots + L_d G'_{s-d} = L_d G'. \quad (25)$$

In such a case, both curves share a common component L_d passing through the origin. Therefore their intersection multiplicity at this point is ∞ by definition.

Example 4. Now we apply our new estimate on the pair of curves from the Example 2. This example also shows the case, where $I_O(F, G) \geq mn + \sum t_i$. Let F and G be curves defined by the polynomials

$$F = x^3 - y^7, \quad (26)$$

$$G = x^5 - y^{11}. \quad (27)$$

Then,

$$\begin{aligned} t_0 &= \deg(\gcd(x^3, x^5)) = 3, \\ t_1 &= \deg(\gcd(x^3, 0, x^5, 0)) = 3, \\ t_2 &= \deg(\gcd(x^3, 0, 0, x^5, 0, 0)) = 3, \\ t_3 &= \deg(\gcd(x^3, 0, 0, 0, x^5, 0, 0, 0)) = 3, \\ t_4 &= \deg(\gcd(x^3, 0, 0, 0, -y^7, x^5, 0, 0, 0, 0)) = 0, \\ t_i &= 0 \quad \text{for all } i > 4, \end{aligned} \quad (28)$$

therefore

$$I_O(F, G) \geq mn + \sum t_i = 3 \cdot 5 + 3 + 3 + 3 + 3 = 27. \quad (29)$$

Here, our estimate ($I_O(F, G) \geq 27$) is an improvement to the inequality (9) (which gave us the estimate $I_O(F, G) \geq 18$), but it is not equal to the actual value of the intersection multiplicity, which is in this case 33.

Acknowledgments

This work was supported by the Slovak Research and Development Agency, under the contract No. APVV-16-0053 and by the Grant of the Comenius university UK/361/2021. ~

References

- [1] Bohumil Bydžovský: *Úvod do algebraicke geometrie*, Jednota československých matematiků a fysiků, 1948.
- [2] William Fulton: *Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry*, <http://www.math.lsa.umich.edu/~wfulton/>.
- [3] Egbert Brieskorn, Horst Knörrer: *Plane Algebraic Curves*, Birkhäuser Basel, 1986.
- [4] Ernst Kunz: *Introduction to Plane Algebraic Curves*, Birkhäuser Basel, 200.
- [5] Daniel Perrin: *Algebraic Geometry, An Introduction*, Springer-Verlag London, 2008.
- [6] David Eisenbud, Joe Harris: *The Geometry of Schemes*, Springer-Verlag New York, 2000.
- [7] David Eisenbud, Joe Harris: *3264 and All That, A Second Course in Algebraic Geometry*, Cambridge University Press, 2016.

Sbírka řešených příkladů z konstruktivní geometrie

Collection of Worked Examples in Constructive Geometry

Jana Bulantová, Jan Šafařík, Lucie Zrůstová

Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně

Veveří 331/95 Brno, Česká Republika

bulantova.j@fce.vutbr.cz, safarik.j@fce.vutbr.cz, zrustova.l@fce.vutbr.cz

Abstract. The aim of the paper is to introduce a new Constructive Geometry solved problem set, created during the "coronavirus times" by the staff of the Faculty of Civil Engineering of the Brno University of Technology. The problem set was created using the interactive mathematics software suite Geogebra.

Keywords: Geogebra, AutoCAD, coted projection, Monge projection, orthogonal axonometry, linear perspective, theoretical solution of the roof, topographic surfaces, Stereography projection.

Klíčová slova: Geogebra, AutoCAD, kótované promítání, Mongeovo promítání, kolmá axonometrie, lineární perspektiva, teoretické řešení střech, topografické plochy, Stereografická projekce.

1 Úvod

V tomto příspěvku chceme seznámit s novými výukovými materiály pro předmět Konstruktivní geometrie na FAST VUT v Brně. Jedná se o sbírku řešených příkladů vytvořených s využitím dynamického systému GeoGebra. Některé příklady však byly vytvořeny i pomocí AutoCADu. Sbírka je sestavena jako GeoGebra kniha a je dostupná na adrese <https://www.geogebra.org/m/ejhn4jay>.

2 Vznik sbírky

Už před několika vzniklo na fakultě stavební CD Deskriptivní geometrie [1], o kterém bylo na minulých konferencích také referováno [2], [3]. S průběhem let došlo ke změnám osnov předmětu Konstruktivní geometrie a bylo třeba na tyto změny reagovat. Rovněž programu OtherCad, ve kterém bylo CD vytvořeno, skončila podpora. Bylo nutné najít vhodnou alternativu. Jako dobrou volbou se jeví volně dostupný program GeoGebra [4], [5].

V předchozích letech vytvořili vyučující Konstruktivní geometrie na Fakultě stavební VUT v Brně velké množství příkladů v programu GeoGebra, které jsou dostupné na webových stránkách Ústavu matematiky a deskriptivní geometrie – <https://math.fce.vutbr.cz/studium.php>. O několika kapitolách jsme se zmínili již na loňské konferenci [6], [7]. Hlavním důvodem pro vznik nové sbírky byla snaha tyto již vzniklé příklady uspořádat do jednoho celku a doplnit o velké

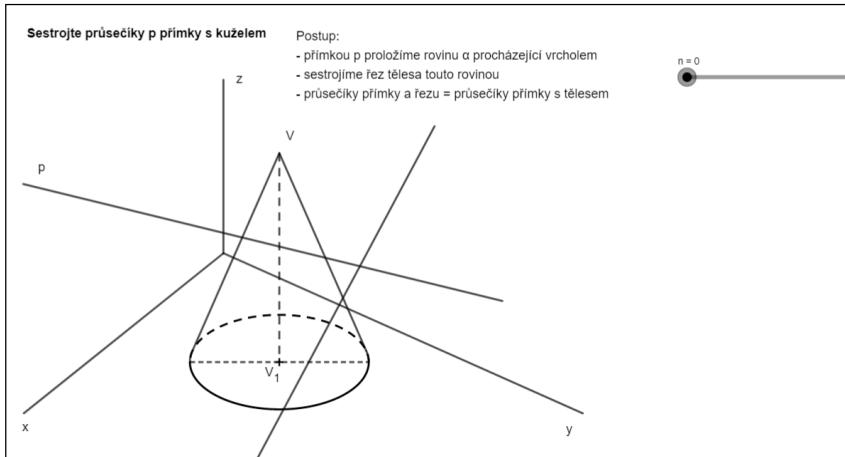
množství nových příkladů tak, aby soubor příkladů pokryval problematiku celého učiva předmětu Konstruktivní geometrie pro 1. ročník stavební fakulty. Především šlo o to vytvořit nové příklady na aplikace deskriptivní geometrie – teoretické řešení střech, topografické plochy a kartografická zobrazení.

Obr. 1: Úvodní strana sbírky

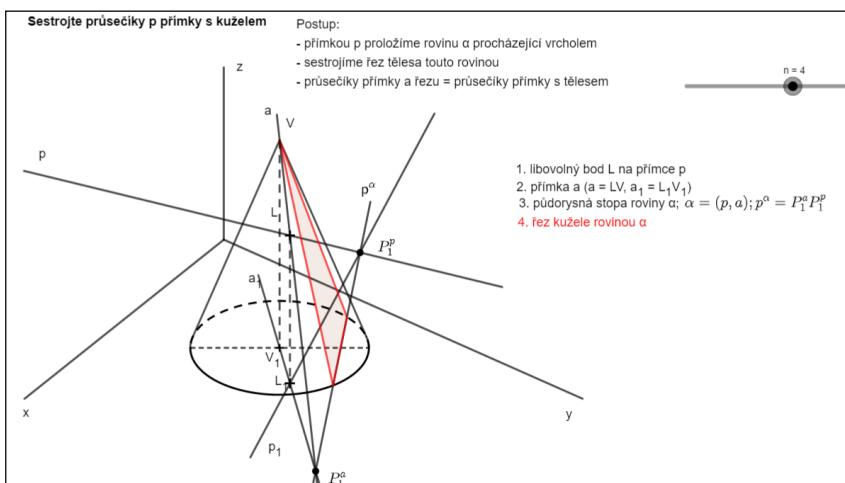
3 Obsah sbírky

Celá sbírka zahrnuje více jak 250 příkladů rozdělených do následujících kapitol:

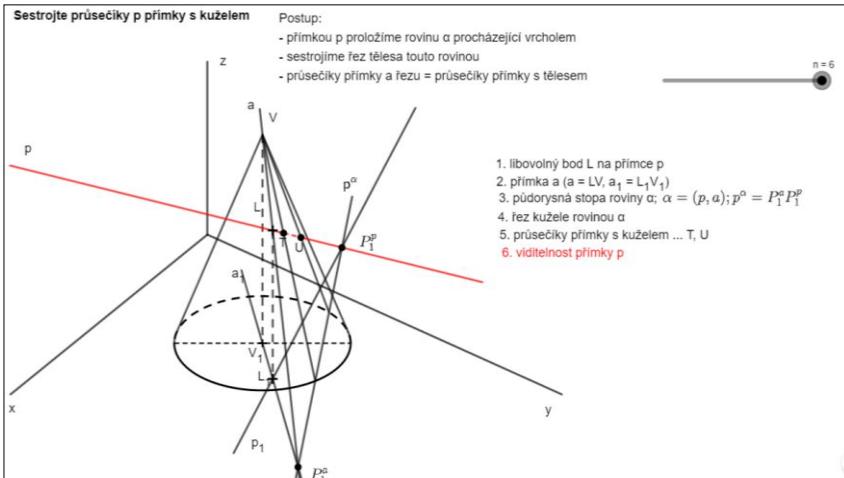
- Pomocné konstrukce – konstrukce pravidelných mnahoúhelníků, rektifikace kružnice
- Kuželosecky – konstrukce kuželoseček a jejich tečen
- Perspektivní kolíneace – obraz n-úhelníků
- Perspektivní afinita – obraz n-úhelníku a kružnice
- Kótované promítání – jednoduché konstrukce potřebné pro řešení střecha topografických ploch
- Mongeovo promítání – základní úlohy, sestrojení těles, řezy těles
- Kolmá axonometrie – základní úlohy, řezy těles a průsečíky přímky s tělesem
- Lineární perspektiva – konstrukce v základní i svislé rovině, sestrojení kružnice, perspektiva daného objektu
- Teoretické řešení střech – řešení střech s okapovými hranami v jedné rovině, zakázané okapy
- Topografické plochy – napojení vodorovných i stoupajících cest a plošin s terénem, vrstevnice jsou přímky nebo křivky
- Kartografická zobrazení – Stereografická projekce – polární, rovníková, obecná, loxodroma, ortodroma



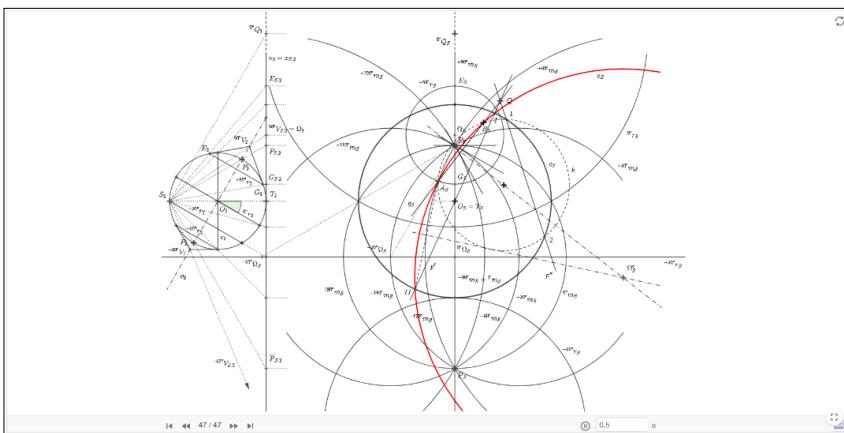
Obr. 2: Zadání příkladu



Obr. 3: Ukázka krokování



Obr. 4: Vyřešený příklad



Obr. 5: Krokování pomocí navigačního panelu

4 Krokování

Velkou výhodou programu GeoGebra je, že umožňuje příklad rozložit do více kroků. Pro studenty je snadnější vyznat se v provedených konstrukcích. K sestrojení krokovaných příkladů jsme využívali funkce „Posuvník“ a „Podmínky zobrazení objektu“, kdy podmínky jsou klasické matematické nerovnosti vymezující zobrazení a skrytí objektů, přičemž je možný pomocí logických operátorů víckrát po sobě zobrazovat a skrývat dané objekty, nebo lze

pro krokování použít v „Nastavení“ – „Pro pokročilé“ zapnutí navigačního panelu pro krokování konstrukce, s případným nastavením bodů zastavení.

5 Závěr

Příspěvek ukazuje možnosti programu GeoGebra pro tvorbu studijních materiálů. Tyto materiály jsou veřejně dostupné a je možné je využít i pro studenty nebo učitele jiných vysokých a středních škol.

Poděkování

Tento článek vznikl za podpory *Institucionálního plánu VUT – Vnitřní soutěž 2021*.

Literatura

- [1] J. Bulantová, P. Hon, K. Prudilová, J. Puchýřová, J. Roušar, V. Roušarová, J. Slaběňáková, J. Šafařík, H. Šafářová, L. Zrůstová: *Deskriptivní geometrie, verze 4.0 pro I. ročník Stavební fakulty Vysokého učení technického v Brně*, Soubor CD-ROMů Deskriptivní geometrie, Fakulta stavební VUT v Brně, 2012.
ISBN 978-80-7204-626-3.
- [2] J. Šafařík, J. Puchýřová, H. Šafářová: *Nové trendy výuky deskriptivní geometrie v bakalářském studiu na Fakultě stavební VUT v Brně*, 26. konference Geometrie a počítačová grafika, Nové Město na Moravě, 10. - 15. září 2006, ISBN 80-7040-902-9, pp.235-240.
- [3] J. Šafařík, L. Zrůstová: *Multimediální sbírka příkladů z deskriptivní geometrie*, 29. konference o geometrii a počítačové grafice, Doubice, 7. – 10. září 2009, ISBN:80-86195-61-9, EAN: 978-80-86195-61-2, pp.269-274.
- [4] GeoGebra [online]. [cit. 2021-10-10].
Dostupné z: <<https://www.geogebra.org/>>
- [5] J. Šafařík, J. Slaběňáková, J. Sivčák: *Výuka deskriptivní geometrie na Stavební fakultě VUT a nové studijní materiály vytvářené v dynamickém systému GeoGebra*. In 37. konference o geometrii a grafice, Proceedings of the Slovak-Czech Conference on Geometry and Graphics 2017. Bratislava: Slovak Society for Geometry and Graphics / Czech Society for Geometry and Graphics, 2017, ISBN: 978-80-89597-78-9, pp.153-162.
- [6] J. Bulantová, A. Lachová: *Teoretické řešení střech s Geogebrou*, Proceedings of the Czech-Slovak conference on geometry and graphics 2020. First. Plzeň: Vydavatelský servis, 2020, ISBN: 978-80-86843-71-1, pp.71-74.

- [7] F. Urbánek, L. Zrůstová: *Přehled základních konstrukcí lineární perspektivy v programu GeoGebra*, Proceedings of the Czech-Slovak conference on geometry and graphics 2020. First. Plzeň: Vydavatelský servis, 2020, ISBN: 978-80-86843-71-1, pp.183-186.
- [8] J. Bulantová, A. Lachová, K. Mencáková, B. Morávková, L. Rýparová, M. Szórád, J. Šafařík, F. Urbánek, L. Zrůstová: *Sbírka řešených příkladů z konstruktivní geometrie*, [online]. GeoGebra. 2021 [cit. 2021-10-10]. Dostupné z <<https://www.geogebra.org/m/ejhn4jay>>
- [9] L. Zrůstová: *Výuka deskriptivní geometrie na VUT v Brně*, 25. konference o geometrii a počítačové grafice, Janov nad Nisou, 2005, ISBN: 80-7015-013- 0, pp.307-312.

GeoGebra Nástroje ve výuce planimetrie

GeoGebra Tools in Teaching Planimetry

Věra Ferdiánová, Jakub Poruba

*Dept. of mathematics, Faculty of Science, University of Ostrava
30. dubna 22, 701 03 Ostrava, Czech Republic
vera.ferdianova@osu.cz, jakub.poruba@osu.cz*

Abstract. GeoGebra je nástroj prioritně určený pro výuku geometrie na všech stupních škol. Je to velice variabilní nástroj, díky němuž jsme schopni vytvořit širokou škálu materiálů, které mohou být sloučeny do jedné e-knihy přímo dostupné na portálu GeoGebry. Výhodou tohoto softwaru je také skutečnost, že si v něm lze vytvořit vlastní chybějící nástroje, které nejsou defaultně v GeoGebře k dispozici. Cílem článku je představení tvorby Nástrojů, které vyučujícím napomohou ve výuce Planimetrie.

GeoGebra is software primarily designed for teaching geometry at schools of all levels. Thanks to its variability, wide range of materials can be created and all these files can be joined into one e-book directly available from GeoGebra portal. Another advantage of this software is that you can create your own missing tools, which are not available in GeoGebra by default. The aim of the article is to present the creation of Tools that may help teachers in teaching Planimetry.

Keywords: GeoGebra, Tool, Planimetry, sample construction

Klíčová slova: *GeoGebra, Nástroje, planimetrie, vzorová konstrukce*

1 GeoGebra a funkce Nástroj

GeoGebra je nástrojem primárně vytvořeným pro dynamickou geometrii, avšak má širokou škálu užití, lze ji použít také např. pro výuku matematické analýzy či statistiky. Proto je široce užívána napříč všemi stupni škol a školských zařízení.[3] Je to velice variabilní nástroj, díky němuž jsme schopni vytvořit širokou škálu materiálů, které mohou být sloučeny do jedné e-knihy přímo dostupné na portálu GeoGebry. Výhodou tohoto softwaru je také skutečnost, že si v něm lze vytvořit vlastní chybějící nástroje, které nejsou defaultně v GeoGebře k dispozici.

Samotné nástroje lze uložit a nahrát k použití v jiných GeoGebra souborech. Vše probíhá přes položku menu Nástroje, kde vybereme položku Správa nástrojů. V dalším kroku zvolíme z nabídky vytvořený nástroj a klikneme na Uložit jako, čímž uložíme samotný nástroj do vlastního souboru s příponou souboru ggt. Nahrání nástroje pak probíhá přes základní menu – položku Soubor a otevřít, kde nahrajeme soubor se samotným nástrojem a automaticky se zobrazí v liště nástrojů. Druhou možností je přetáhnout soubor s nástrojem (musí mít však příponu souboru ggt) do otevřeného nového okna GeoGebry.

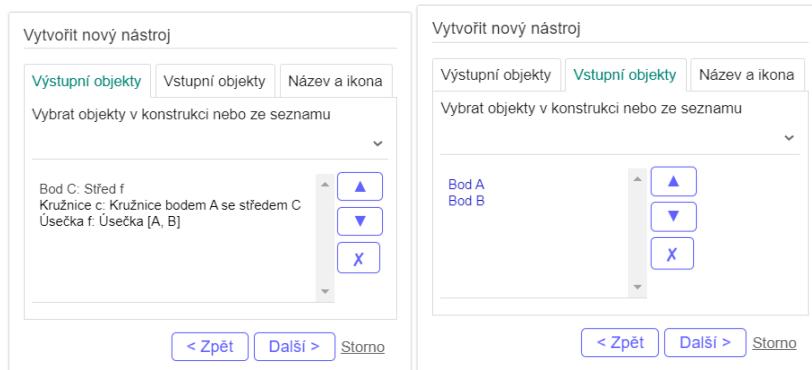
1.1 Algoritmus tvorby Nástroje

Algoritmus tvorby nástroje je jednoduchý, avšak poněkud retrospektivní. Jestliže chceme vytvořit konkrétní konstrukční nástroj, pak je nutno nejdříve vytvořit celou konstrukci, jenž budeme nazývat vzorovou konstrukcí, a následně se musíme rozhodnout, které konstrukční prvky jsou vstupní a které výstupní. Tímto nadefinováním již následně stačí k vykreslení konstrukce pouze zadat vstupní prvky, výstupní se objeví automaticky (a případné pomocné konstrukce vedoucí k finálové konstrukci budou automaticky skryty – nepůjde je zobrazit např. vyvoláním jiného příkazu). Musíme také si uvědomit, že pokud chceme zadávat hodnotu pomocí klávesnice, např. velikost úhlu nebo vzdálenost, je potřeba v původní konstrukci vytvořit proměnnou reprezentovanou Posuvníkem.

1.2 Ilustrační ukázka vytvoření nového Nástroje

Tvorbu takového nástroje ukážeme na jednoduchém příkladu nástroje pro tvorbu Thaletovy kružnice.

Pro konstrukci Thaletovy kružnice potřebujeme v GeoGebře zadat tři prvky – úsečku (AB), její střed (C) a kružnici c ($C, |AC|$). V nabídce menu poté klikneme na Nástroje a Vytvořit nový nástroj. Následně zvolíme vstupní a výstupní prvky, a pojmenování příkazu – viz Obr.1 a Obr.2.



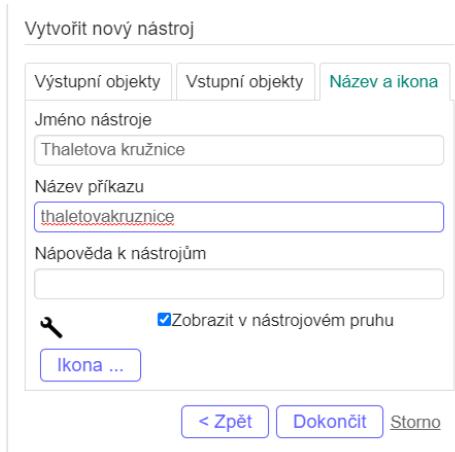
Obr. 1: Ukázka vybrání Vstupních a Výstupních objektů (GeoGebra 6)

2 Základní množiny bodů dané vlastnosti

Již děti na základní škole v prvních hodinách geometrie se učí rýsovat základní množiny bodů daných vlastností. Mezi první z nich můžeme řadit konstrukci hledání středu nebo osy zadané úsečky. V principu se jedná o konstrukci, která obsahuje dvě kružnice, jejichž průsečíky určují hledanou osu úsečky. GeoGebra již má v základním nastavení implementovány dva příkazy: Střed dvou bodů a Bisekci úsečky. Proto se zaměříme na množiny, jenž potřebujeme konstruovat

pravidelně a jsou nedílnou součástí při řešení planimetrických úloh. Mezi „základní konstrukce“ můžeme zařadit

- Množina bodů, ze kterých je úsečka viditelná pod daným úhlem,
- osa pásu úseček,
- konstrukce dvou rovnoběžek v dané vzdálenosti,
- Thaletova kružnice ad.

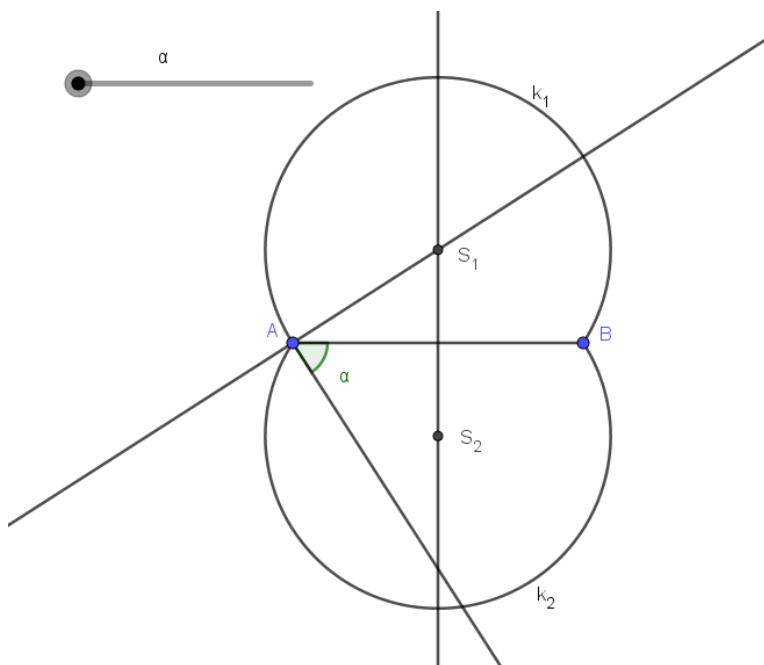


Obr. 2: Nabídka pro zvolení názvu příkazu a popisu (GeoGebra 6)

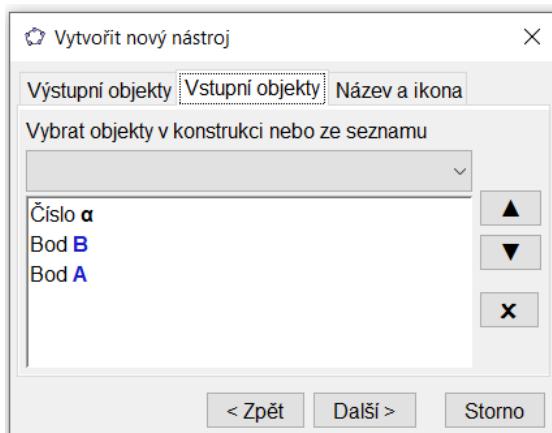
2.1 Ilustrační ukázka vytvoření nového Nástroje

V první řadě vytvoříme Nástroj pro množinu bodů viditelnou pod ostrým úhlem. Jedná se v principu o jednoduchou konstrukci, jenž využívá znalosti sestrojení osy úsečky a nanesení úhlu. Při využití příkazu úhel dané velikosti jsme nezvolili námi vybraný ostrý úhel, ale obecný úhel alfa. Následně se automaticky v konstrukci vytvoří posuvník. Tento krok je důležitý, pokud chceme konstrukci využít obecně. Jakmile nalezneme střed S_1 , můžeme zkonstruovat kružnicový oblouk k_1 , druhý kružnicový oblouk k_2 má střed v bodě S_1 , jenž získáme pomocí středové nebo osové souměrnosti. V rámci výuky se následně uvádí konstrukce množiny bodů, z nichž vidíme úsečku pod tupým úhlem, viz [1]. Tuto množinu bodů nemusíme konstruovat, jelikož nástroj je v základu navržen tak, aby fungoval obecně.

Jakmile je konstrukce dokončena můžeme aktivovat Vytvořit nový nástroj. Na výstupu zvolíme kružnicové oblouky k_1, k_2 . Následně na vstupu zvolíme body AB, jenž určují úsečku, která má být viditelná pod úhlem α .



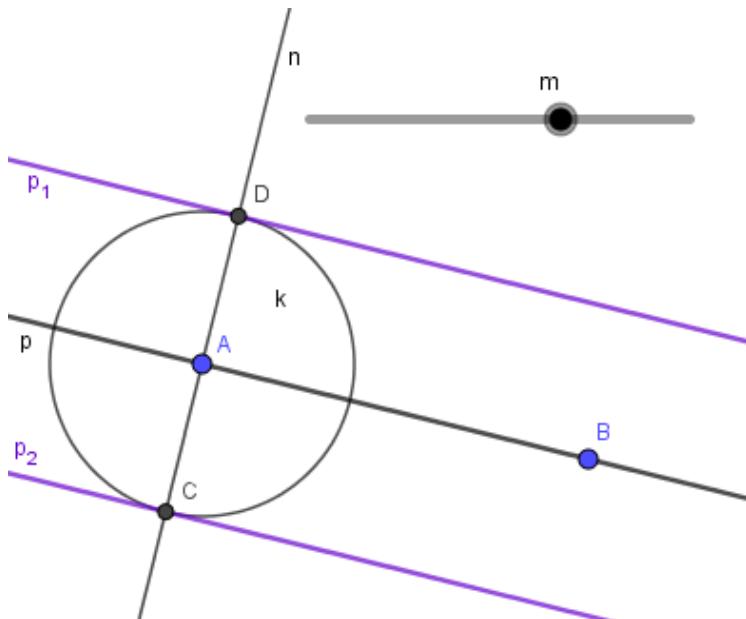
Obr. 3: Vzorová konstrukce množiny bodů roviny, ze kterých je úsečka AB vidět pod úhlem dané velikosti α



Obr. 4: Označení vstupních objektů ze vzorové konstrukce (GeoGebra 5)

2.2 Rovnoběžka v dané vzdálenosti

Mějme přímku p a k ní chceme sestrojit rovnoběžku ve zvolené vzdálenosti. V rámci vzorové konstrukce (obr. 5) sestrojíme přímky p_1 a p_2 , za pomocí kolmice n na přímku p a kružnice k ; $k(A, m)$ jejíž poloměr nám bude zajišťovat v Nástroji zvolenou vzdálenost. Jako Výstupní objekty určíme přímky p_1 a p_2 . Vstupními objekty bude přímka p a číslo m , jenž nám bude určovat v jaké vzdálenosti od přímky p , chceme vytvořit rovnoběžky.



Obr. 5: Konstrukce rovnoběžek dané vzdálenosti od přímky p

V rámci Nástroje potřebujeme obě rovnoběžky, jelikož je nutné uvažovat nad univerzálností nástroje. Uživatel v budoucnu pak může skrýt nevhodící se rovnoběžku. Nevýhodou je, že GeoGebra popíše nové objekty lexikograficky, takže nelze už dopředu předdefinovat pomocí indexů výsledné objekty. Další nevýhodou je, že se nepřenáší styly, jenž byly použity ve vzorové konstrukci.

3 Závěr

GeoGebra je velmi silný nástroj v oblasti geometrie a pokud máme kreativní myšlení, tak existuje nepřeberné množství možností pro její využití. V rámci příspěvku bylo představeno, jak můžeme využít možnost funkce Nástroje. Výuka planimetrie za pomocí GeoGebry je pro učitele velmi výhodná, jelikož napomáhá při generování zadání konstrukčních úloh. Pokud ještě k tomu učitel využije již

naprogramované vlastní Nástroje, tak se práce zefektivní. Další Nástroje mohou být vytvořeny i pro odvětví deskriptivní geometrie např. Mongeova promítání[2] nebo kótovaného promítání.

Poděkování

Tento článek vznikl za podpory SGS01/PřF/2020-2021 – Podpora vědecké činnosti studentů v dílčích oblastech matematiky.

Literatura

- [1] E. Davidová: *Řešení planimetrických konstrukčních úloh*. Ostrava 2005
- [2] Ferdiánová, V., Poruba, J., Procházková, M. GeoGebra Tools in Creating Materials for Teaching Monge Projection. In: *EDULEARN21 Proceedings*. 2021. pp. 5669-5678. ISBN: 978-84-09-31267-2
- [3] GeoGebra. [online]. 2021. Available from <https://www.geogebra.com>

Dynamická geometrie online

Dynamic Geometry Online

Roman Hašek

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta
Jeronýmova 10, 371 15 České Budějovice, Česká republika
hasek@pf.jcu.cz

Abstrakt. The paper deals with the online presentation of mathematical and geometric content. Specifically, it focuses on a way how to present this content through HTML materials, which can take the form of both stand-alone websites and sub-components of an online education system, such as Moodle. Selected examples will show the use of JavaScript libraries JSXGraph and MathJax to create a quality presentation of geometric content. The benefit of using these libraries is the opportunity to freely combine mathematical text in LaTeX format with interactive dynamic images in these materials.

Keywords: Dynamic geometry, JSXGraph, online content, LaTeX.

Klúčová slova: Dynamická geometrie, JSXGraph, online obsah, LaTeX.

1 Úvod

Příspěvek je zaměřen na online prezentaci matematického a geometrického obsahu. Věnuje se konkrétnímu způsobu prezentace tohoto obsahu prostřednictvím materiálů ve formátu HTML, které mohou mít jak podobu samostatné webové stránky, tak i dílčí součásti nějakého online vzdělávacího systému, například Moodle. Na vybraných příkladech bude ukázáno, jak lze použitím knihoven JavaScriptu JSXGraph [6] a MathJax [8] vytvořit kvalitní prezentaci geometrického obsahu, v níž se volně kombinuje matematický text ve formátu LaTeX [7] s interaktivními dynamickými obrázky.

2 JSXGraph

JSXGraph je knihovnou JavaScriptu pro vytváření dynamických obrázků určených především pro online publikaci jako součást webové stránky čitelné pro všechny běžně využívané webové prohlížeče [2, 4]. JSXGraph byl vytvořen a je stále vyvíjen na Univerzitě Bayreuth [1], viz <https://jsxgraph.uni-bayreuth.de>. Podpora a zkoumání možných cest využití tohoto jazyka ve vzdělávání byly předmětem projektu ITEMS (Improving tools for E-assessment in Math and Science) [5], řešeného v mezinárodním týmu v rámci programu Erasmus+, viz <https://itemspro.eu>. Jedním z výstupů tohoto projektu je *Příručka pro práci v JSXGraphu* [10], dostupná i v češtině na adrese <https://ipesek.github.io/jsxgraphbook>. Další informace o JSXGraphu v češtině i konkrétní příklady jeho použití viz [4] a [2]. Zde se zaměříme především na užití JSXGraphu pro online

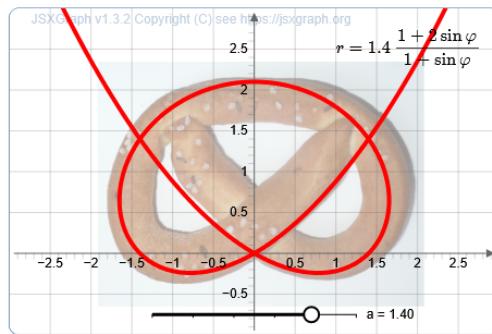
prezentaci matematických dokumentů ilustrovaných dynamickými obrázky formou webové stránky. Matematické výrazy v těchto dokumentech jsou vysazeny prostřednictvím výše zmíněného systému MathJax [8].

3 Online prezentace matematického obsahu

Příkladem dokumentu ve formátu HTML, vybaveného dynamickými applety programovanými v JSXGraphu a obsahujícího matematické výrazy kódované prostřednictvím knihovny MathJax, je materiál věnovaný křivce ve tvaru preclíku, anglicky Pretzel curve [3], jehož náhled je zachycen na Obr. 1. Vidíme na něm jeden dynamický obrázek a text obsahující matematické výrazy. Text je dokonce i součástí samotného dynamického obrázku (appletu). Jedná se o tzv. dynamický text, jehož některé komponenty se mění dle okamžitých hodnot příslušných proměnných. I tento text je vysazen prostřednictvím knihovny MathJax.

Pretzel curve

Roman Hašek, Pavel Pech
University of South Bohemia



The *pretzel curve* is a quartic curve, the shape of which resembles a pretzel, as shown in figures below. The mathematical representations of this curve are as follows:

- Polar equation: $r = a \frac{1 - 2 \cos \varphi}{1 - \cos \varphi}; \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$
- Parametric equations: $x = a \frac{-t^4 + 4t^2 - 3}{2t^3 + 2}, \quad y = a \frac{t^3 - 3t}{t^2 + 1}; \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad t \in \mathbb{R}.$
- Algebraic equation: $y^4 + x^2y^2 + 2ax^3 + 2axy^2 + 3a^2x^2 - a^2y^2 = 0; \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

Source: Hasek, R. (2017) A Remarkable Quartic Pretzel Curve. *Journal for Geometry and Graphics*. Volume 21, No. 1, 37–44.

Obrázek 1: *Pretzel curve*, online matematický text s dynamickými obrázky

Implementace MathJaxu není nikterak složitá. Stačí do hlavičky HTML souboru umístit následující „snippet“ (vše potřebné je uvedeno na webové stránce [8]):

```
<script src="https://cdn.jsdelivr.net/npm/jsxgraph/distrib/  
jsxgraphcore.js" type="text/javascript" charset="UTF-8"></script>  
<script src="https://cdn.jsdelivr.net/npm/mathjax@3/es5/tex-chtml.js"  
id="MathJax-script"></script>
```

Potom již můžeme v HTML kódu provádět sazbu matematických výrazů užitím syntaxe systému LaTeX.

V úryvku dokumentu na Obr. 1 lze ale kromě matematického textu odhalit i jiné možnosti, které nám k využití nabízí JSXGraph. Jedná se o vložení obrázku na pozadí nákresny appletu, implementaci dynamického textu do okna appletu, využití posuvníků pro ovládání hodnot parametrů a v neposlední řadě je to i zobrazení křivky dané parame-trickou či polární rovnici. K vkládání obrázku stojí za zmínku, že ve-dle vložení formou odkazu na externí zdroj můžeme pro menší obrázky použít i formát „Data URI“, který dovoluje vnořit kód obrázku přímo do kódu stránky a tím ho učinit nezávislým na externím zdroji. Pro převod do formátu URI lze užít různé online převaděče. Pro detailní obeznámení se s pokročilejšími funkcemi JSXGraphu lze doporučit sérii webinářů <https://jsxgraph.uni-bayreuth.de/wp/docs/index.html>.

4 JSXGraph v dalších příkladech použití

Velké množství konkrétních příkladů využití JSXGraphu je dostupné na str. <https://jsxgraph.uni-bayreuth.de/wiki/index.php/Category:Examples>.

JSXGraph má významné použití ve vzdělávacím systému Moodle [9]. Konkrétní ukázky najdeme na adrese <https://jsxgraph.org/examples>.

Za zmínku i prostudování bezesporu stojí slovenské interaktivní online učebnice *i-učbeníki*, při jejichž tvorbě byl JSXGrph využit významnou měrou, viz <https://eucbeniki.sio.si>.

5 Závěr

Programovací jazyk JSXGraph je, jako svébytná knihovna JavaScriptu, neustále vyvíjen a obohacován odborníky z Univerzity Bayreuth pod ve-dením prof. Alfreda Wassermannova ve spolupráci s komunitou uživatelů, kteří jsou rozmištěni po celém světě. Lokální zárodek této komunity nyní existuje i na Pedagogické fakultě Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích. Rádi zodpovíme jakýkoliv dotaz k použití JSXGraphu, stejně jako rádi uvítáme jakékoliv podněty či návrhy k využití tohoto prostředku ve výuce nejenom matematiky, ale celého spektra předmětů STEM.

Reference

- [1] M. Ehmann, M. Gerhäuser, C. Miller, A. Wassermann: Sketchometry and JSXGraph – Dynamic geometry for mobile devices. *South Bohemia Mathematical Letters*, Volume 21, No. 1, 2016, pp. 1–7 Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~sbml/wp-content/uploads/Wassermann_web.pdf
- [2] R. Hašek: JSXGraph, knihovna Java Scriptu pro tvorbu interaktivních geometrických konstrukcí. *Proceedings of the Czech-Slovak Conference on Geometry and Graphics 2020, Pardubice, September 7–10, 2020*. Plzeň: Vydavatelský servis, 2020, pp. 85–88. Dostupné z: https://2020.csgg.cz/files/Proceedings_CGG_2020_online.pdf
- [3] R. Hašek: A Remarkable Quartic Pretzel Curve. *Journal for Geometry and Graphics*. Volume 21, No. 1, pp. 37–44.
- [4] R. Hašek, P. Pech, P. Rosa: Programování v JSXGraph *Sborník příspěvků 9. konference Užití počítačů ve výuce matematiky* [online]. Jihoceská univerzita v Českých Budějovicích, 2019, pp. 39–44. [cit. 10. 10. 2021]. Dostupné z: <http://www.pf.jcu.cz/upvm/2019>
- [5] ITEMS; *Improving Tools for E-assessment in Maths and Science* [online]. [cit. 10. 10. 2021]. Dostupné z: <https://itemspro.eu>
- [6] JSXGraph; *Dynamic Mathematics with JavaScript* [online]. [cit. 10. 10. 2021]. Dostupné z: <https://jsxgraph.uni-bayreuth.de/wp/index.html>
- [7] LaTeX In Wikipedia; *The Free Encyclopedia* [online] [cit. 18. 10. 2021] Dostupné z <https://en.wikipedia.org/wiki/LaTeX>
- [8] MathJax; *Beautiful and accessible math in all browsers* [online]. [cit. 10. 10. 2021]. Dostupné z: <https://www.mathjax.org/>
- [9] Moodle. [cit. 10. 10. 2021]. Dostupné z: <https://moodle.org>
- [10] I. Pešek a kol.: *Příručka pro práci v JSXGraphu* [online]. [cit. 10. 10. 2021]. Dostupné z: <https://ipesek.github.io/jsxgraphbook/>

Interpolace bodů transcendentní křivky

Interpolation of Transcendental Curve Points

Marta Hlavová

*ČVUT v Praze, Fakulta strojní, Ústav technické matematiky
Karlovo náměstí 13, 121 35 Praha 2, Česká republika
marta.hlavova@fs.cvut.cz*

Abstrakt. This paper deals with the dependence of geometrical accuracy of a natural cubic spline curve on the Euclidean distance between the definition points of spline curve. As an example, a transcendental curve – a graph of function $f : y = \sin(x)$, x from the interval $[0, 2\pi]$ – is used.

Keywords: Natural cubic spline curve, Bézier cubic curve, Coons cubic curve, geometrical accuracy, metrology

Klíčová slova: Přirozený kubický spline, Bézierova kubika, Coonsova kubika, geometrická přesnost, metrologie

1 Úvod

Interpolace pomocí kubické spline křivky je běžně používanou metodou k rekonstrukci tvaru křivky z několika jejích bodů. Interpolační kubická spline křivka je tvořena segmenty Fergusonových kubik s těmito definičními body, segmenty na sebe navazují s C^2 spojitostí. Na základě těchto podmínek jsou ve vnitřních bodech dopočítány tečné vektory, přirozený kubický spline pak akceptuje dvě speciální okrajové podmínky – nulové druhé derivace v obou krajiných bodech křivky [1], [2]. Interpolovat body lze též pomocí jednosegmentové křivky, tedy jednoho polynomu, zde je ovšem velkou nevýhodou růst stupně polynomu v závislosti na počtu interpolovaných bodů. Pro zachování hladkosti výsledného modelu stačí interpolovat po částech polynomem pouze třetího stupně, z tohoto důvodu je zde k interpolaci zvolena přirozená kubická spline křivka.

Trascendentní křivka je křivka, která nemá polynomiální reprezentaci a v CAD systémech tedy nemůže být nikdy vymodelována přesně. Křivku lze pouze nahradit přibližným CAD modelem, zde modelem interpolačním. Tento model využívá přesné body teoretické transcendentní křivky jako body definiční. Přímá vzdálenost těchto bodů ovšem nutně ovlivňuje tzv. geometrickou přesnost interpolačního modelu, tedy jeho odchylku od modelu teoretického. Odchylka dvou křivek je definována jako maximální vzdálenost mezi těmito dvěma křivkami, je měřená na normálách křivek. Hlavním cílem této práce je stanovit maximální přímou vzdálenost sousedních definičních bodů pro jejich pravidelné rozložení tak,

aby odchylka interpolační kubické spline křivky od teoretické (přesné) křivky byla maximálně rovna předem dané geometrické přesnosti.

Geometrická přesnost CAD modelu hráje podstatnou roli v oblasti rychle se vyvíjející metrologie, kdy je v některých případech (např. kalibrační či kontrolní měření) nutné CAD model z primárně naměřených definičních bodů vytvořit tak, aby odchylka jakékoli jiné množiny kontrolních bodů od CAD modelu byla menší než stanovená přesnost [3]. Stanovením závislosti geometrické přesnosti na vzdálenosti měřených definičních bodů by byl celý proces měření zjednodušen a urychlen – a proto je v současné metrologii velmi diskutovaným tématem.

2 Odvození vztahu mezi vzdáleností definičních bodů a geometrickou přesností

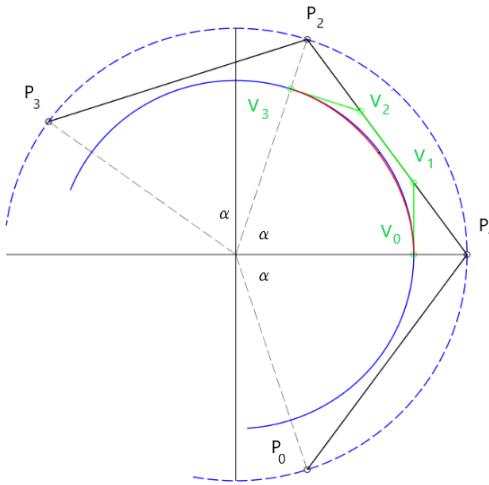
Tvar každé křivky lze charakterizovat pomocí funkce křivosti $k(x)$, která je případě transcendentní křivky dané rovnicí $y = f(x)$ na uzavřeném intervalu I dána vztahem

$$k(x) = \frac{f''(x)}{\sqrt{(1 + f'^2(x))^3}}.$$

Předpokládejme nyní, že je pro každé x_0 z I křivost $k(x_0)$ definována, a tedy existuje v každém bodě křivky oskulační kružnice s poloměrem $r(x_0) = 1/k(x_0)$, kterou lze v blízkém okolí křivku nahradit. V místě křivky, kde dosahuje křivosti maximální, má oskulační kružnice minimální poloměr, a právě tento tzv. minimální poloměr křivosti křivky je jedním z faktorů významně ovlivňujícím vzdálenost definičních bodů pro interpolaci. Pro pravidelné rozložení definičních bodů tedy bude postačující zjistit, jak body rozmístit daleko od sebe právě v blízkosti oskulační kružnice s nejmenším poloměrem.

Pro odvození vztahu mezi maximální vzdáleností d , poloměrem minimální křivosti r a stanovenou geometrickou přesností a využijeme vlastnosti základních modelů kubických křivek v počítačovém modelování. Každý segment interpolační kubické spline křivky lze definovat nejen jako interpolační Fergusonovu kubiku, ale též jako approximační kubiku Bézierovu nebo Coonsovou. Coonsova kubika je approximační křivka třetího stupně daná čtvericí řídících bodů $P_i, i = 0, 1, 2, 3$. Její řídící body pravidelně rozmístíme na kružnici s poloměrem ρ jako vrcholy pravidelného n -úhelníka tak, aby krajní body této Coonsovy kubiky ležely na kružnici s poloměrem r . Použitím převodních vztahů pro určení polohy čtyř řídicích bodů $V_i, i = 0, 1, 2, 3$ tak, aby křivka byla jimi definována jako kubika Bézierova, získáme vztah mezi poloměry r, ρ a úhlem α

$$\rho = \frac{3r}{2 + \cos(\alpha)}.$$



Obrázek 1: Rozmístění řídicích bodů kubiky.

Na Obr.1 je kubika znázorněna červeně, její řídicí polygon (Coons) černě, řídicí polygon (Bézier) zelenou barvou, modrou plnou čarou pak kružnice s poloměrem r , modrou čárkovanou čarou kružnice pomocné s poloměrem ρ . Pro polohu řídicích bodů Bézierovy kubiky pak platí

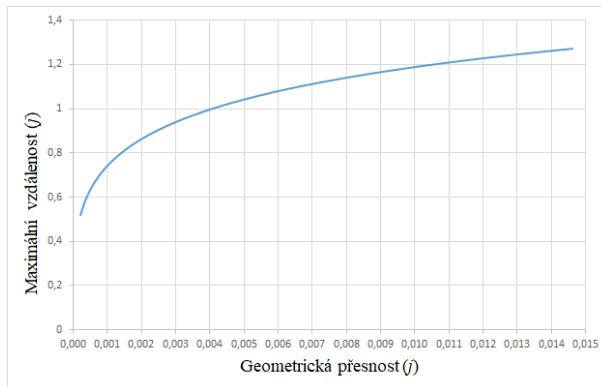
$$\begin{aligned} V_0 &= (r, 0), & V_1 &= \left(r, r \frac{\sin(\alpha)}{2+\cos(\alpha)}\right), \\ V_2 &= \left(r \frac{1+2\cos(\alpha)}{2+\cos(\alpha)}, r \frac{\sin(\alpha)}{2+\cos(\alpha)}\right), & V_3 &= (r \cos(\alpha), r \sin(\alpha)) \end{aligned}$$

a rovnici této křivky $\mathcal{P}(t)$, $t \in [0, 1]$ obdržíme ze základní rovnice pro Bézierovu kubiku [4]. Díky pravidelnému rozložení řídicích bodů P_i (a tedy i V_i) bude maximální odchylky křivky $\mathcal{P}(t)$ od kružnice s poloměrem r dosaženo v polovině křivky, tedy pro hodnotu parametru $t = 1/2$. Položíme-li vzdálenost bodu $\mathcal{P}(1/2)$ od kružnice s poloměrem r rovnou stanovené geometrické přesnosti a a poloměr r hodnotě poloměru minimální křivosti křivky, získáme vztah

$$a = r \left(1 - \frac{\sqrt{2}(\cos(\alpha) + 11)\sqrt{\cos(\alpha) + 1}}{16 + 8\cos(\alpha)}\right),$$

ze kterého lze pro stanovenou přesnost a určit úhel α a pomocí něj pak spočítat požadovanou maximální vzdálenost

$$d = r \sqrt{2 - 2 \sin(\alpha)}$$



Obrázek 2: Graf závislosti vzdálenosti d na přesnosti a pro $r = 1$ (j je délková jednotka).

jako vzdálenost krajních bodů kubiky $\mathcal{P}(t)$. Protože úhel α se z rovnice pro a nedá obecně vyjádřit a může být získán pouze pomocí numerických metod pro konkrétní hodnoty a, r , není možné předvést výsledný vzorec pro určení vzdálenosti d v závislosti na hodnotách a a r , jak jsme předpokládali.

2.1 Znázornění závislosti d na přesnosti a a poloměru r

Nejjednodušším způsobem, jak výsledek prezentovat a zpřístupnit pro praktické využití, je zafixovat jednu z proměnných – minimální poloměr křivosti r nebo geometrickou přesnost a – a závislost maximální vzdálenosti d na zbývající proměnné zobrazit pomocí grafu z vypočtených hodnot. Na Obr.2 je příklad takového grafu závislosti d na a pro minimální poloměr křivosti $r = 1$.

3 Interpolace bodů křivky $y = \sin(x)$

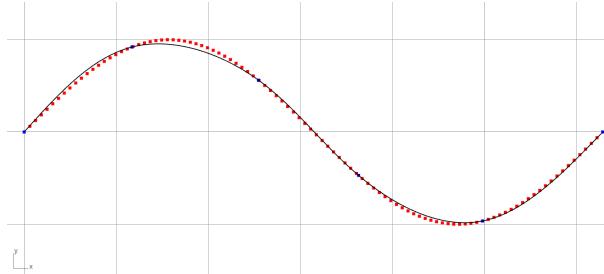
Jako demonstrační křivka byla zvolena část grafu funkce $y = \sin(x)$ na intervalu $[0, 2\pi]$. Její křivost

$$k = -\frac{\sin(x)}{\sqrt{(1 + \cos^2(x))^3}}$$

nabývá maxima 1 (v absolutní hodnotě) pro $x = \pi/2$ a $x = 3\pi/2$, minimální poloměr křivosti je tedy $r = 1$. Maximální vzdálenosti d byly vypočteny pro zvolené hodnoty geometrických přesností, viz Tab.1.

Všechny údaje – přesnost, poloměr křivosti a zjištěná vzdálenost jsou ve stejných délkových jednotkách. Hodnoty geometrických přesností jsou

a	0.1000	0.0100	0.0010	0.0001
d	1.6883	1.1888	0.7418	0.4340

Tabulka 1: Hodnoty maximální vzdálenosti d pro zvolené přesnosti a .Obrázek 3: Interpolaci model s kontrolními body ($a = 0.1000$).

zvoleny tak, aby pro jednotku 1 mm rádově odpovídaly přesnostem různých typů měřicích zařízení – od běžně užívaných až po ty nejpřesnejší stroje, které pracují s maximálními odchylkami 10^{-4} mm. Pro lepší představu, v jakých rádech se měření pohybuje, uvažujme jako jednotku 1 km. Zvolená křivka $y = \sin(x)$ by měla délku přibližně 7.64 km a jednotlivé přesnosti znamenají tyto maximální odchylky: $a = 0.1000$ km = 100 m, $a = 0.0100$ km = 10 m, $a = 0.0010$ km = 1 m a $a = 0.0001$ km = 10 cm.

3.1 Vyhodnocení

Pro každou přesnost byly na teoretické křivce vygenerovány teoretické body od sebe vzdálené o odpovídající hodnotu d (první bod je vždy počátek $(0,0)$) a těmito body byla proložena přirozená kubická spline křivka. Výpočet jednotlivých segmentů byl proveden v software Maple. Pro ověření byla vygenerována další sada kontrolních přesných bodů – 100 vnitřních bodů křivky, na Obr.3 je vidět jejich rozložení (červené body) vůči černé interpolaci křivce dané definičními modrými body. Pomocí software Rhinoceros bylo provedeno statistické vyhodnocení odchylky sady kontrolních bodů od interpolaci křivky, viz Tab.2.

geometrická přesnost	0.10000	0.01000	0.00100	0.00010
průměrná vzdálenost	0.01892	0.00386	0.00030	0.00001
maximální vzdálenost	0.05961	0.01298	0.00148	0.00005

Tabulka 2: Vyhodnocení přesnosti.

Z této tabulky je vidět, že v případě geometrické přesnosti 0.0100 a

0.0010 nebyla podmínka maximální povolené odchylky splněna ve všech kontrolních bodech, ve zbylých dvou případech je pro danou přesnost počet definičních bodů (a tedy jejich vzdálenost) stanovena dostatečně. V případě $a = 0.0100$ byla interpolační křivka proložena 9 body, v případě $a = 0.0010$ pak definičních bodů pro interpolaci vyšlo 17. I když výsledek testování u těchto dvou křivek nedopadl dle očekávání, je stanovený počet bodů výborným výchozím odhadem pro další postup. Každé další navýšení počtu pravidelně rozložených definičních bodů pro interpolaci (a tedy příslušné zmenšení vzdálenosti d) statistiku vylepšuje a uspokojivého výsledku pro $a = 0.0100$ lze dosahnot po dvou krocích – pro 11 bodů, v případě $a = 0.0010$ dokonce hned po jednom kroku – pro bodů 18.

4 Závěr

Zde popsaná metoda stanovení přímé vzdálenosti definičních bodů pro interpolaci křivkou dané přesnosti vychází z geometrických vlastností křivky – konkrétně z křivosti. V případě transcendentní křivky dané rovnicí byl odhad vzdálenosti v závislosti na požadované geometrické přesnosti stanoven pomocí minimálního poloměru křivosti, kdy jako maximální odchylka křivek byla uvažována odchylka oskulační kružnice od kubické křivky s pravidelně rozloženými řídicími body. Díky této předpokládané pravidelnosti metoda na ukázkovém příkladu nefunguje zcela pro všechny zvolené přesnosti, alespoň řádově však výsledky maximálních odchylek všem přesnostem odpovídají. Pro praktické využití v metrologii ale i tento hrubý odhad má význam, neboť například při měřeních rozumnějších prostorových objektů stanovuje dolní hranici počtu bodů ke změření, a tím dodá velmi cennou informaci o minimální době měření.

Poděkování

Článek vznikl za podpory grantu SGS21/148/OHK2/3T/12: Aplikace matematicko-geometrického modelování ve strojírenství.

Reference

- [1] F. Ježek: *Geometrické a počítačové modelování - pomocný učební text*, Plzeň, 2000
- [2] M. Hlavová: *Curve reconstruction from a set of measured points*, Proceedings of Seminar Programs and Algorithms of Numerical Mathematics, Prague, 2021
- [3] V. Zelený, I. Linkeová, P. Skalník: *Calibrated CAD model of freeform standard*, In XXI IMEKO World Congress Measurement in Research and Industry, pages 1423-1428, Prague, 2015
- [4] L. Piegl, W. Tiller: *The NURBS Book*, Monographs in Visual Communications. Springer, Berlin, 1997

Constructions of Quatrefoil

Michaela Holešová

*Dept. of Structural Mechanics and Applied Mathematics, Faculty of Civil Engineering
University of Žilina, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina, Slovak Republic
michaela.holesova@uniza.sk*

Abstract. In architecture, we meet with different and also more complex shapes. Due to the technical construction, they are usually made up of basic geometric elements, such as a line and a circle. They are used to create interesting floor plans, openings and decorative elements. In addition to the relatively frequently used ovals, we also encounter the so-called quatrefoil based on four circles or ovals in Slovak architecture. These are arranged symmetrically and are connected to each other by lines which are predominantly tangential to these circles. We will show some interesting constructions of quatrefoils.

Key words: Geometric construction, historical architecture, quatrefoil

1 Introduction

Geometry is the basis of architecture, although we do not see it directly in buildings. It is certainly true that without geometric knowledge, beautiful buildings would not have been created. We will focus on the Gothic period and the four-leaf motifs used in architecture. Gothic architecture is one of the oldest stages of historic architecture development in Slovakia, which can be evidenced by a larger set of preserved buildings and their parts.

Quatrefoil also appears as a filling of oculi - often unfilled rural simplified form of large rosettes of cathedrals with stained glass, it is often located where it symbolically mediated the entry of light into the church. The Quatrefoil can be it forms a ventilation opening of the truss space (see Fig. 1) [1].

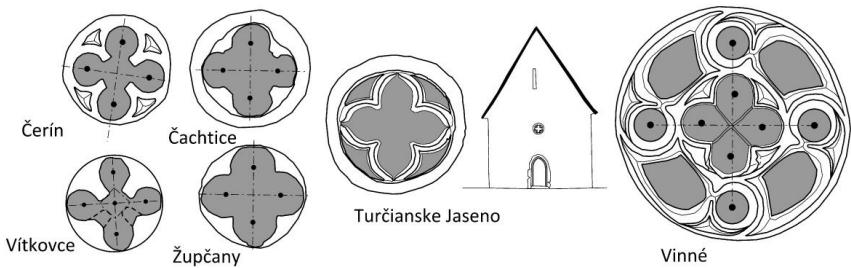


Fig. 1: Quatrefoil oculi on mostly rural churches/chapels [1]

They also deal with the issue of Gothic rosette windows in the Czech Republic. A typical feature of the Gothic tracery is a circular rosette filled with a trefoil, a quatrefoil, etc., later they changed into lobed or heart shapes, which

were still formed by circular arcs. For medieval builders, geometry also had a symbolic meaning, and the basic shapes in the design were a square, an equilateral triangle and a circle (see Fig. 2).

They were used not only as a basis for floor plans of buildings, but also to create decorative elements and various details of buildings such as also in the creation of vaults and tracery of Gothic windows [3], [4].

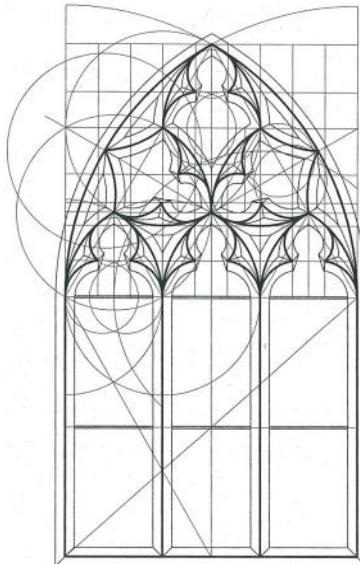


Fig. 2: Tracery in the church of St. Martin in the Wall [4]

2 Geometric analysis of quatrefoil constructions

The definition of the quatrefoil and the connection with sacral symbolism can be found in [2], where Quatrefoil: “*a figure constructed in the form of a cross, of four equal segments of circles, either intersecting or stopped by angles. This is a proper figure to encompass a cross, the four evangelists, the four doctors, or the five wounds of our Lord, which are expressed in a square, with one in the centre.*”

From the geometric point of view, we take a square as the basic shape, into which the forming circles are suitably inscribed so that a shape of a four-leaf clover is created. We often meet two groups of quatrefoils. The first we denote as type A, where the basic circle c_1 with radius $r_1 = \frac{1}{2} |AB|$ is inscribed in the basic square ABCD. The creating circle c_2 has a center on the axis of the sides of the square and a radius r_2 (Fig. 3), where the radius r_2 is equal to one quarter of the length of the side of the base square ABCD, or half of the radius r_1 of the base circle, i.e. $2r_2 = r_1 = \frac{1}{2} |AB|$. To complete the Quatrefoil motif, the already

created concentric circles can be taken as inside circles and we get type A1 or we take them as outside circles and we get type A2 of the Quatrefoil motif.

We denote the second type as B, where the centers of the defining circles lie on the axes of the sides of the base square ABCD and on the axis of the angle of the side of the base square ABCD and its diagonal (Fig. 3).

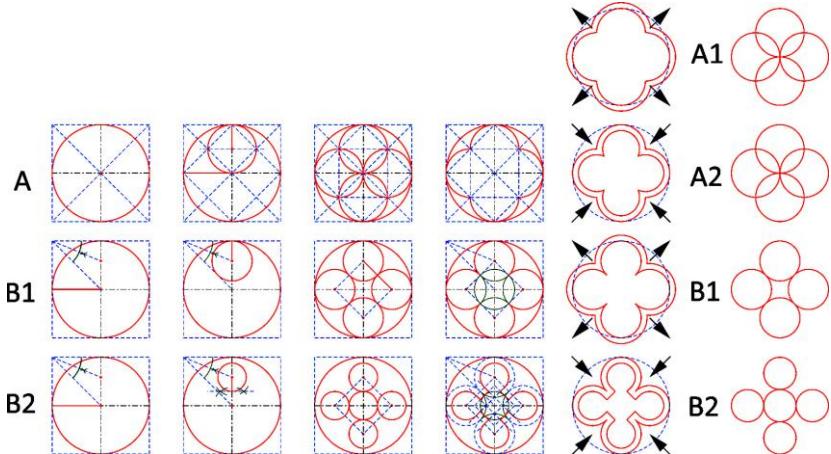


Fig. 3: Analysis of quatrefoil shape variants [1]

It follows from the basic properties of the square that for type A are the centers of the circles r_2 in the vertices of the square EFGH (see Fig 4), the vertices of which lie on the axes of the sides of the base square ABCD, and the length of the side of this square is equal to 1/4 of the length of the diagonal AC of the base square.

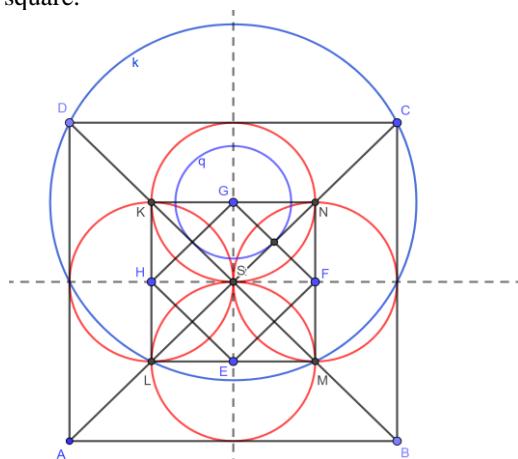


Fig. 4: Quatrefoil motif, type A

The forming circles intersect at the diagonals of the basic square ABCD. These common points are determined by the KLMN square. The length KL is equal to half the length of the side AB of the base square.

Let us denote the radius of other concentric circles forming the Quatrefoil as r_3 . Due to the construction and location of the centers, these circles also intersect on lines that contain the diagonals of the basic square ABCD. Of course, for type A2 is $r_2 > r_3$, and therefore, for these circles to have common points, $r_2 > r_3 \geq \sqrt{2}r_2/2$ have to be true. In the case $r_3 = \sqrt{2}r_2/2$, these circles touch in the intersections of the diagonals of the basic square ABCD with the sides of the square EFGH. Drawn circle q in Fig 4. for type A1 is $r_3 > r_2$. The size of the radius can be chosen arbitrarily, but in terms of practical use it is about the maximal size $r_3 = \sqrt{5}r_2$. With the radius chosen in this way, the concentric circles intersect in the vertices of the base square ABCD. The drawn circle k , see Fig. 4.

In type B (Fig. 5), the centers of the defining circles are the vertices of the square EFGH. The distance $|EF|$ can calculate depending on the length of the side of the base square, or on the radius r_1 of the base circle and it is

$$|EF| = (\sqrt{2} - 1) |AB| = 2(\sqrt{2} - 1)r_1.$$

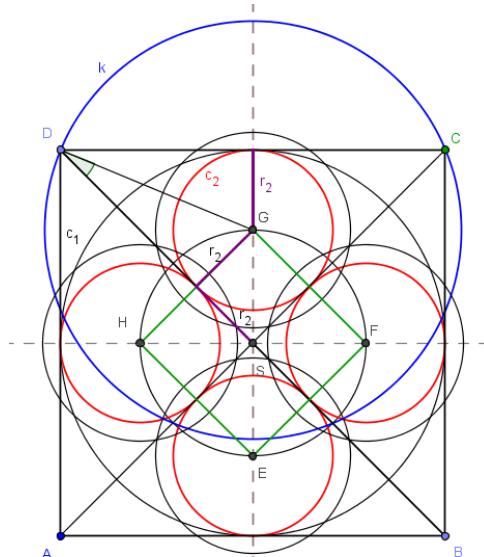


Fig. 5: Quatrefoil motif, type B1

For type B1, the radius r_2 of the creating circle is the same as the distance of the center of the creating circle from the side of the base square and is therefore

$$r_2 = (\sqrt{2} - 1)r_1 = |EF|/2 = (\sqrt{2} - 1) |AB|/2.$$

Let r_3 be the radius of other circle for draw the Quatrefoil motif. In this type, it is clear that $r_3 > r_2$ and the circles have centers in the vertices of the EFGH square and will intersect on the lines AC, BD. If the circle passes through the vertex of the base square, then its radius is $r_3 = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} r_1$. In the Fig. 5, the circle k is drawn.

For type B2, if the defining circles so that they touch (as in Fig. 3, Fig. 6) and are the circles with the same radius, then the radii of these circles are equal to one quarter of the diagonal of the square EFGH whose vertices are in the centers of these four determining circles and thus

$$r_2 = (2 - \sqrt{2}) r_1/2.$$

Another circle defining the Quatrefoil motif is a concentric circle with radius

$$r_3 = (\sqrt{2} - 1) r_1.$$

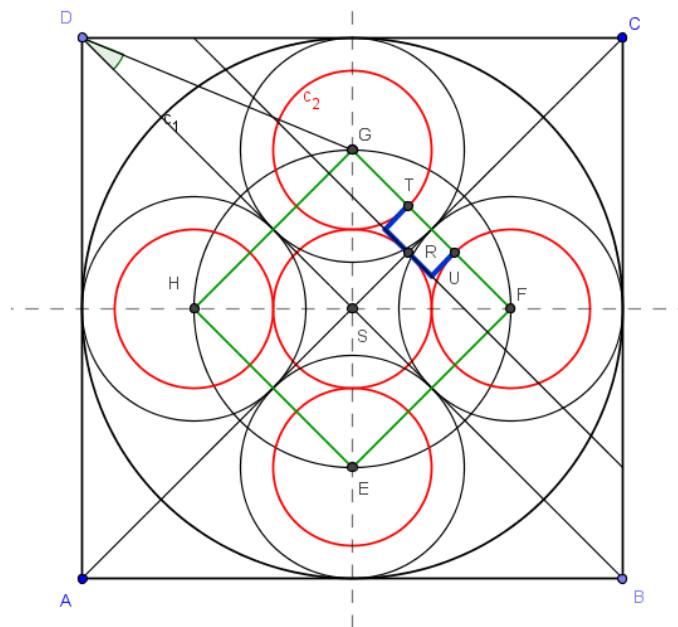


Fig. 6: Quatrefoil motif, type B2

These circles touch in the center of the sides of the EFGH square. The connection of the defining circles with the radius r_2 can be made, for example, by constructing a tangent to this circle at the intersection R of the diagonal of the base square and the inside determining circle. The tangent is parallel to the second diagonal of the base square ABCD (see Fig. 6) and the distance of the points is $|RS| = r_2 = (2 - \sqrt{2}) r_1/2$.

The intersections of this tangent with the defining circles may be considered as the boundary points of the line segment joining the defining circles. For small radii of defining circles, there is not much difference with such a connection that from the sides of the EFGH square from points T, U to the tangent, lines parallel to the diagonal of the basic square ABCD are also used. The latter method is more common in practice. The distance of the point R from the line FG is equal to

$$r_3 - r_2 = |\text{TU}|/2 = (3\sqrt{2}/2 - 2) r_1, \text{ where}$$

$$|\text{TU}| = |\text{EF}| - 2r_2 = 2(r_3 - r_2) = (3\sqrt{2} - 4) r_1.$$

3 Conclusion

The quatrefoil is a beautiful example of the connection between geometry and architecture, as well as an example of the application of geometry in technical practice. Quatrefoils can also be used as a motivation for teaching geometry in secondary and primary schools. That is why it is interesting to examine and geometrically analysis old buildings. Also study historical architectural books, which are full of very interesting and almost forgotten geometric constructions.

References

- [1] Z. Grúňová, M. Holešová: *Quatrefoil Motif in Slovakia – Gothic Roots of the Parametric Architecture*, XXX Russian-Polish-Slovak Seminar Theoretical Foundation of Civil Engineering (RSP 2021), Springer International Publishing, Vol. 189, pp. 63-72
- [2] A. W. N. Pugin: *Glossary Of Ecclesiastical Ornament And Costume: compiled and illustrated from ancient authorities and examples*, 1844, Plate X., pp. 178
- [3] D. Kolářová: *Gothic Rose Window*, Proceedings of the Slovak-Czech Conference on Geometry and Graphics: 24th symposium on Computer Geometry SCG 2015, 35th conference on geometry and graphics: Terchová, Žilina september 14-18, 2015. - Plzeň: Vydavatelský servis, 2015. - pp. 153-154
- [4] D. Kolářová: *Inspirace architektúrou*, VII. Vedecká konferencia s medzinárodnou účasťou, Zborník prednášok 6.sekcia: Aplikácie geometrie v technickej praxi/TU, Košice, 22.-24.5.2002, pp. 51-52

What Is a Curve?

Pavel Chalmovianský

*Department of algebra and geometry
Mlynská dolina, 842 48 Bratislava, Slovakia
pavel.chalmoviansky@fmph.uniba.sk*

Abstract. We consider various conditions required in the definition of a curve. This notion is fundamental in several areas of mathematics such as differential geometry, algebraic geometry, topology and others. There is not a unique approach in these areas and one usually requires certain level of overlapping of properties. Hence, the notion of a curve is formulated in terms of the dimension and the local parameterization of a suitable topological space which are specified in the corresponding mathematical discipline. Though the notion of topological dimension is only very briefly dealt with here, we explain it for curves. In case of algebraic geometry, the notion of Krull dimension is less intuitive, but computationally clearer.

Keywords: curve, topology, differential geometry, algebraic geometry

1 Introduction

The notion of a curve is using very intuitively in many areas of mathematics due to the fact that only “very nice” objects are computationally feasible and therefore considered in applications. Intuitive notion of curve has been built from the ancient times. Euclid described the line as *something which has length, but has no width and height*. Clearly, this takes the notion of dimension into play, though it was far from precise approach. The change appeared with the discovering of coordinates and analytic method. Then parameterization started to play a role and in constructive geometry, a result of a particular point construction with a parameter gave curves.

Later, when the notion of a function has appeared, the dimension started to be described by a function with one parameter. The curve started to be *something which can be describe by a parameter, continuously changing*. Due to nature of the function, the curves could be algebraic as well as transcendent. In physics, a trace of a moving particle represented by a mass point in a space was considered as a curve. Such an approach was pretty intuitive. When topology started to form, a continuous image of an interval $[0, 1]$ was naturally taken into consideration. However, very soon the counterexamples were provided which lead to the formation of a more precise notion of dimension.

Higher order of differentiability provides a sufficient condition for well defined curved object. Hence, a piecewise C^1 differential mapping from an interval to a space is usually enough to consider in differential geometry and similarly based disciplines. In algebraic geometry, a curve is locally an intersection of sufficient number of algebraic varieties. However, the

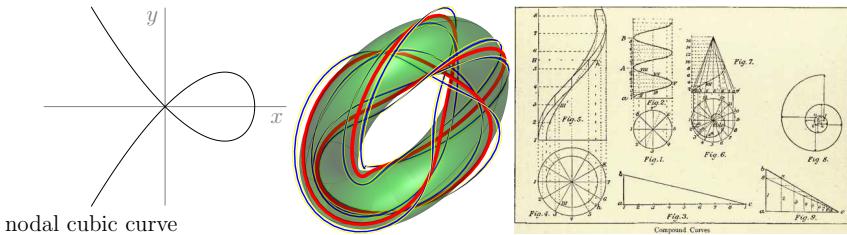


Figure 1: Examples of curves in differential geometry. Curve $c(t) = (1 - t^2, t(1 - t^2))$ (left), knot on a torus (middle), curves such as helix or spiral used in constructions (right).

result strongly depends on the ground field (ring), which we are working with. Hence, the curve can be of very different nature and dimension at the first sight.

2 Analytic approach and its modifications

2.1 How to define a curve

A strong physical intuition says, curve is a trace of a mass point in a space. A usual definition of a parameterized curve is a mapping

$$c: I \rightarrow \mathbb{E}^d$$

such that I is an (open) interval of \mathbb{R} , c is C^1 -continuous and the mapping is an immersion (regular, $\dot{c}(t) \neq \vec{0}$), or at least local diffeomorphism (see [1], [2]). Intuitively, looking on a point of a curve and its suitable neighborhood in the ambient space, we expect the curve is locally a slightly bent line. This intuition is strongly reflecting the local nature of real line, which parameterizes the analytic curve.

2.2 Weakening the conditions

Why is the condition of C^1 -continuity important – we have tangent line, which approximates the behavior of the curve in a close neighborhood. Is there a property of higher order of differentiability more convenient? The answer is no. Any parameterization is an auxiliary structure on a curve and the curve might have singularities (e.g. corners) even in case of high order of differentiability (see fig. 2). For less order of differentiability, one might obtain practically arbitrary subset of points without derivatives, e.g. like in Brownian motion or functions, which are continuous, but nowhere differentiable (e.g. Weierstrass function defined as a Fourier series, $W_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^{-n\alpha} \cos(b^n \pi x)$ for $0 < a < 1$, b odd integer and $\alpha = -\log a / \log b$ satisfying $ab > 1 + 3/2\pi$).

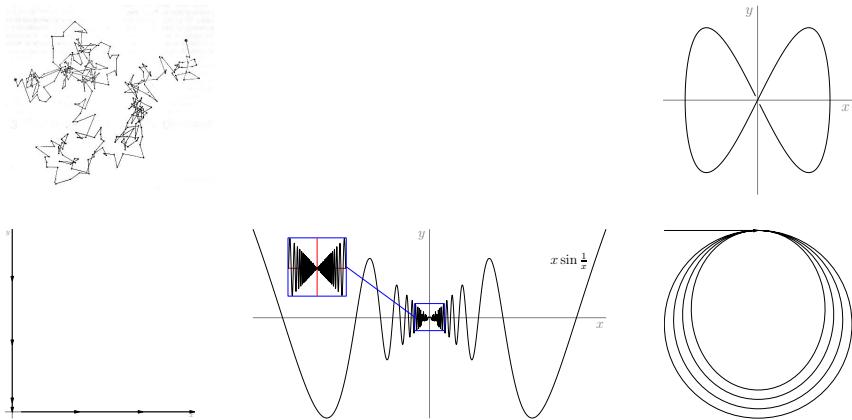


Figure 2: The conditions in the analytic definition of a curve are weakened. Brownian motion (upper left), an example of immersion, non-embedding, $c(t) = (\sin t, \sin 2t)$, $t \in (-\pi, \pi)$ (upper right), an example of C^∞ -parameterization $(0, e^{\frac{1}{t}})$, $t < 0$, $(e^{-\frac{1}{t}}, 0)$, $t > 0$ with a corner (lower left), an example with infinite tangent directions at origin (lower middle), an example with infinite multiplicity of a point (lower right).

In general topology, a continuous mapping of an interval is considered as a curve. Hence, all the above phenomena are necessary to play with. The way of answering certain questions about such objects can be dealt with the techniques of homotopy or homology.

Let X be a topological space (e.g. $X = \mathbb{R}^3$, we are stay in this space or its subplanes for convenience). A continuous mapping $c: [0, 1] \rightarrow X$ is called a *path* and it is considered to be a curve in the space X . Moreover, we recognize also *arc*, which is homeomorphic image of the interval $[0, 1]$. The arc is closer to the intuition since the curves in differential geometry are local homeomorphisms. It can be seen from the following examples, that one might obtain a substantially more complicated Balfour. If the mapping is just C^0 we might get piece wise differentiable curve, fractal curve or the image of the mapping might even fill some area like the well known Hilbert or Peano curve (see fig. 3). If I is not interval, we might obtain non-connected subspace of \mathbb{E}^3 . If the mapping is not an immersion, we might have singularities which are not possible to classify (points without tangent, with different half-tangents, with infinite number of tangent directions, locally it does not look like a *line*).

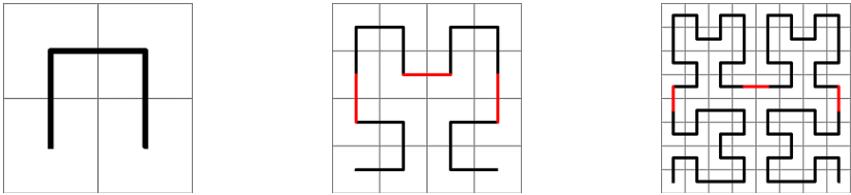


Figure 3: Hilbert curve filling the square is a uniform limit of a sequence, whose first three members are drawn.

2.3 Dimension of a topological space

The concept of dimension of topological space is important and difficult (see [3]). We need to measure the dimension of the image of the mapping (path). There are several approaches to the dimension with same values on several often used types of topological spaces.

For a topological space X , the Lebesgues dimension $\dim X$ is defined as

- $\dim X = -1$ for empty set,
- $\dim X = n$, $n \geq 0$, if for any open covering of the space X , there is a finer open covering of multiplicity at most $n + 1$ (i.e. each point of X is in at most $n + 1$ sets of the finer covering).

Such a dimension is certainly different for some fractal object, since the Hausdorff dimension might be non-integer.

Curves have dimension 1. Hence, we can locally find a sequence of neighborhoods covering the curve so that each point belongs to at most two open sets of the covering (see fig. 4, middle).

2.4 Metric space approach to curves

Continuum is a non-empty connected compact Hausdorff metric space (see [5]). The curve is such a space of Lebesgues dimension 1. This approach brings many object to the collection of curves with somewhat specific properties.

There are continua with points which are distant within the curve but arbitrary close in the ambient space. A universal element is Sierpinski carpet. For examples see fig. 4.

3 Algebraic geometry

In algebraic geometry, a point is identified with all equations which are zero on the point. It is a prime ideal of a suitable ring. Since the rings can be substantially different from \mathbb{R} , algebraic curve is to be expected different from the analytic curve (e.g. finite set of points, non-linearly

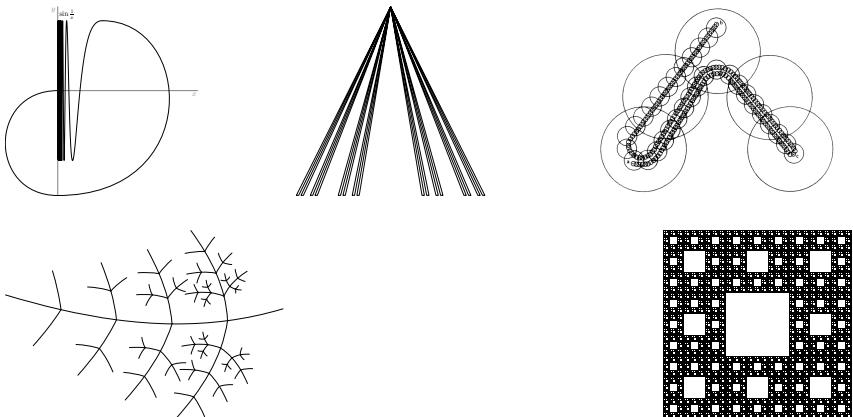


Figure 4: Continuum as general approach to a curve in analytic setting. Topologist sine continuum (upper left), connected point with the Cantor set (upper middle), iteratively define curve via chain covering (upper right), graph embedding (lower left) and Sierpinski carpet (lower right).

sorted, surface in a sense of real differential geometry), but those analytic are taken into account in certain sense as well (see [4]).

As examples of a variety of different objects that are algebraic curves, consider the ring $R[x, y]$, $f(x, y) = x^2 + y^2 - t$. Then taking $R = \mathbb{R}$ and taking $t \in \{1, 0, -1\}$, we have $V_1(f)$ is a circle, $V_0(f)$ is a point, $V_{-1}(f)$ is an empty set. Taking $R = \mathbb{C}$, we have $V_1(f)$, $V_0(f)$ and $V_{-1}(f)$ are complex conic sections. They can be considered as surfaces over \mathbb{R} , if one considers real an imaginary part of the curve as parametric directions of the corresponding surface.

The algebraic curve depends on the ring used for the coefficients. In case of rich structure of subrings, one can expect a rich structure of geometric objects of corresponding type locally on the curve (e.g. curve over the ring \mathbb{Z}).

Hence, the curve has to be defined in a somewhat different way. The solution was done by A. Grothendieck in a more general approach of using *scheme*.

Scheme is an object which locally looks like an algebraic variety over some ring. Such pieces are glued together over a suitable subring which resembles the gluing of the manifold from open sets in \mathbb{R}^d . The topology is locally the Zariski one in the corresponding rings. Using such an approach, many objects can be treated in a unified way.

Algebraic curve is a scheme which is separated, integral, 1-dimensional over the (base) field. *Separatedness* reflects avoiding of space glued so that

one cannot distinguish points using their neighborhoods. The property of *integrality* means irreducibility and reducing in the usual sense. Finally, the *dimension* is the Krull dimension which, intuitively, counts the number of functions necessary to define a subscheme of consisting of closed points on the scheme.

4 Conclusion

The notion of curve is very variable, depending on the area of mathematics in which it is used, as well as the problem being solved. Local parameterization by 1 parameter plays an important role as a primary estimation of something 1-dimensional. However, the notion of dimension plays a more crucial role in the algebraic as well as analytic case. Undesirable properties in real case start with low degree of continuity and non-regularity of parameterization. Algebraic curves are in general objects with strong dependence on the nature of coefficients used in computations. Therefore, the local parameterization is of different nature as well as the dimension used is the Krull. In many important cases, these approaches, differential and algebraic, agree.

Acknowledgement

The author was supported by the Slovak Research and Development Agency under the contract No. APVV-16-0053.

References

- [1] Marcel Berger and Bernard Gostiaux. *Differential geometry: manifolds, curves, and surfaces.*, volume 115. New York etc.: Springer-Verlag, 1988.
- [2] Franki J. E. Dillen and Leopold C. A. Verstraelen, editors. *Handbook of differential geometry. Vol. I.* Amsterdam: North-Holland, 2000.
- [3] Ryszard Engelking. *General topology.*, volume 6. Berlin: Heldermann Verlag, 1989.
- [4] Ulrich Görtz and Torsten Wedhorn. *Algebraic geometry I. Schemes. With examples and exercises.* Wiesbaden: Springer Spektrum, 2020.
- [5] Sam B. jun. Nadler. *Continuum theory. An introduction*, volume 158. New York: Marcel, 1992.

Kolineace kuželoseček s využitím programu GeoGebra

Collineation of Conic Sections Using the GeoGebra Program

Marie Chodorová

*Katedra algebry a geometrie, Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého v Olomouci
17. listopadu 12, 746 01 Olomouc, Česká republika
marie.chodorovar@upol.cz*

Abstract. This paper is devoted to collineation between conic sections. The constructions of the circle imaging in collineation are presented here. The Geogebra drawing program can be effectively used to teach them.

Keywords: Conic section, Collineation, Geogebra drawing program.

Klíčová slova: Kuželosečka, středová kolineace, Geogebra.

1 Kolineace a kuželosečky

Kuželosečky obecně patří mezi jedny z nejstarších křivek, kterými se zabývali vědci již ve starověku. Můžeme říci, že už o nich bylo skoro všechno publikováno, přesto stále patří mezi aktuální téma, neboť se s nimi stále setkáváme i v reálném světě. Kuželosečky můžeme definovat v podstatě třemi způsoby: a) jako množiny bodů dané vlastnosti v rovině; b) jako řezy na kuželi; c) jako kolineární obraz kružnice. Studenti středních i vysokých škol se běžně seznámí s ohniskovými vlastnostmi kuželoseček, ale už jsou méně obeznámeni s projektivními vlastnostmi kuželoseček, které jsou velmi zajímavé i z toho důvodu, že projektivní geometrie nerozlišuje jednotlivé typy kuželoseček, ale studuje kuželosečku obecně. Kolineaci mezi kružnicí a kuželosečkou probírájí jen studenti deskriptivní geometrie, neboť řezy na kuželech, zejména řezy nerotačních kuželů jsou sestrojovány právě pomocí kolineace mezi kružnicí a kuželosečkou, případně pomocí kolineace mezi dvěma kuželosečkami. Využíváme k tomu následující větu: Transformací algebraické křivky středovou kolineací se nemění ani její stupeň ani reducibilnost, tzn. že perspektivní lineární křivka k jednoduché kuželosečce je opět jednoduchá kuželosečka. V praxi se využívá nejvíce toho, kdy jednou z kuželoseček je kružnice a kolineárním obrazem k ní může být kterákoli kuželosečka. O druhu můžeme rozhodnout předem podle polohy kružnice a úběžnice téhož pole, k němuž kružnice patří. Ve středové kolineaci v rovině kuželosečce patřící do prvého pole odpovídá ve druhém poli kuželosečka, která je elipsou (kružnicí), nebo parabolou, nebo hyperbolou, a to podle toho zda úběžnice prvního pole nemá s danou

kuželosečkou žádný společný bod, nebo právě jeden společný bod, nebo dva různé společné body.

2 Konstrukce kuželoseček z daných prvků v kolíneaci

Poněvadž ve středové kolíneaci v rovině odpovídá kružnici kuželosečka je možno této skutečnosti užít ke konstrukci kuželosečky z daných prvků. Postup při řešení je následující: Nejprve zvolíme střed nebo osu kolíneace. Dále zvolíme (ne ovšem libovolně) kružnici, která má odpovídат hledané kuželosečce. Z podmínky, že zvolené kružnici odpovídá hledaná kuželosečka, doplníme prvky v kolíneaci tak, aby byla plně určena, tj. sestrojíme chybějící prvek. Jakmile je kolíneace určena, rozhodneme pomocí úběžnice patřící k poli kružnice o druhu kuželosečky, dále postupujeme podle příslušných úloh o konstrukci elipsy, paraboly a hyperboly. Jsou-li mezi určujícími prvky dvě různoběžné tečny, lze volit jejich průsečík za střed kolíneace. Důsledek: odpovídající kružnice se musí těchto tečen dotýkat. Jsou-li mezi určujícími prvky dva různé body, je možné jejich spojnici volit za osu kolíneace. Důsledek: odpovídající kružnice musí těmito body procházet, jelikož jsou tyto body samodružné. Jsou-li mezi určujícími prvky vlastní tečna s vlastním bodem dotyku, pak lze zvolit za střed kolíneace tento bod dotyku. Důsledek: odpovídající kružnice se musí této tečny v tomto bodě dotýkat. Nebo lze zvolit osu kolíneace v této tečně s bodem dotyku. Důsledek: odpovídající kružnice se musí této tečny v tomto bodě dotýkat. Ve všech případech musíme rozhodnout, zda lze užitím zbývajících prvků dourčit kolíneaci. Poznamenejme, že ne všechny úlohy jsou pomocí kolíneace řešitelné.

3 Kolíneace kuželoseček za pomocí programu GeoGebra

Právě pomocí GeoGebry lze studentům efektivně a názorně předvést konstrukci kuželoseček jako kolíneárního obrazu kružnice. Další výhodou tohoto grafického programu je jeho dynamičnost a možnost rozdělení úlohy na jednotlivé dílčí kroky. GeoGebra dále nabízí možnost neomezené nákresny a přesného rýsování, což je velká výhoda oproti grafickému provádění křídou na tabuli či tužkou do sešitu. Z tohoto důvodu byla v GeoGebře vytvořena kniha Kolíneace mezi kružnicí a kuželosečkou, která obsahuje kapitoly: Kolíneace mezi kružnicí a elipsou, Kolíneace mezi kružnicí a hyperbolou, Kolíneace mezi kružnicí a parabolou, pět řešených příkladů na konstrukci kuželosečky ze zadaných prvků a Kolíneaci mezi parabolou a hyperbolou, viz Obr. 1.-4.

4 Závěr

Geometrie v dnešní době získává pomocí výpočetní techniky a grafického softwaru nový rozměr. Právě program Geogebra nabízí velké možnosti využití v hodinách geometrie. Výše uvedené výukové materiály ke kuželosečkám jsou uvedeny na webových stránkách: <https://www.geogebra.org/u/mariechodorova>

≡ GeoGebra

VYTVORIT TŘÍDU

Kolineace mezi kružnicí a kuželosečkou

Kolineace mezi kružnicí a elipsou

Kolineace mezi kružnicí a hyperbolou

Kolineace mezi kružnicí a parabolou

Kolineace příklad Č 1 první způsob

Kolineace příklad Č 1 druhý způsob

Kolineace příklad Č 2 - první způsob

Kolineace příklad Č 2 - druhý způsob

Kolineace příklad Č 3

Kolineace příklad Č 4

Kolineace příklad Č 5

Kolineace mezi parabolou a hyperbolou

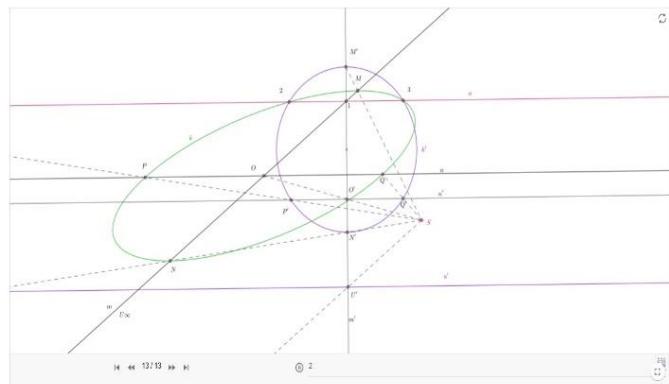
Konstrukce_P1

Konstrukce_H3

Kolineace mezi kružnicí a elipsou

Autor: Marie Chodorovská

Sestrojte kolinejný obraz kružnice K' v kolineaci určené (S.o.u).



Obr. 1: Kolineace mezi kružnicí a elipsou

≡ GeoGebra

VYTVORIT TŘÍDU

Kolineace mezi kružnicí a kuželosečkou

Kolineace mezi kružnicí a elipsou

Kolineace mezi kružnicí a hyperbolou

Kolineace mezi kružnicí a parabolou

Kolineace příklad Č 1- první způsob

Kolineace příklad Č 1- druhý způsob

Kolineace příklad Č 2 - první způsob

Kolineace příklad Č 2 - druhý způsob

Kolineace příklad Č 3

Kolineace příklad Č 4

Kolineace příklad Č 5

Kolineace mezi parabolou a hyperbolou

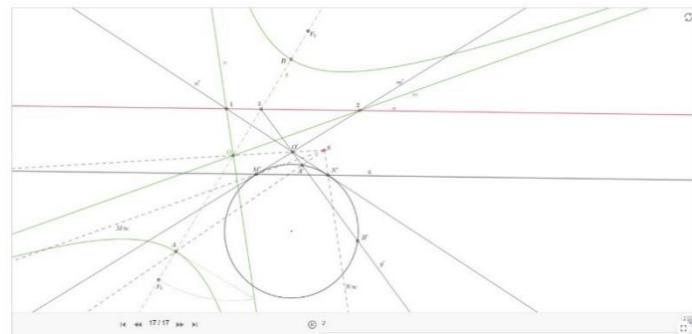
Konstrukce_P1

Konstrukce_H3

Kolineace mezi kružnicí a hyperbolou- konstr.2

Autor: Marie Chodorovská

Sestrojte kolinejný obraz kružnice K' v kolineaci určené (S.o.u).



Obr. 2: Kolineace mezi kružnicí a hyperbolou

☰ Geogebra

VYTVOŘIT TŘÍDU

Kolineace mezi kružnicí a kuhloškou

Kolineace mezi kružnicí a elipsou

Kolineace mezi kružnicí a hyperbolou...

Kolineace mezi kružnicí a parabolou

Kolineace příklad č.1 - první způsob

Kolineace příklad č.1 - druhý způsob

Kolineace příklad č.2 - první způsob

Kolineace příklad č.2 - druhý způsob

Kolineace příklad č.3

Kolineace příklad č.4

Kolineace příklad č.5

Kolineace mezi parabolou a hyperbolou...

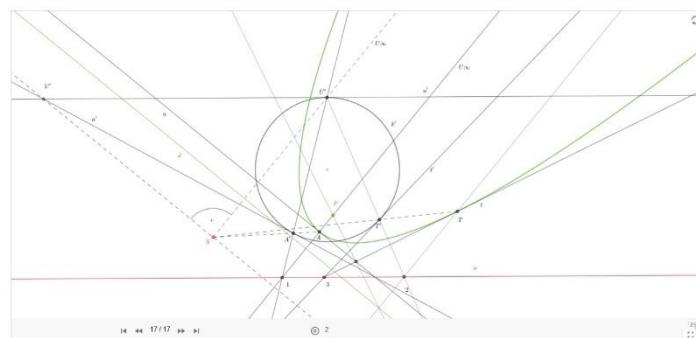
Konstrukce_P1

Konstrukce_H_1

Kolineace mezi kružnicí a parabolou - konstr.3

Autor: Marie Chodorová

Sestrojte kolineární obraz kružnice K v kolineaci uvedené (S.o.u.).



Obr. 3: Kolineace mezi kružnicí a parabolou

☰ Geogebra

VYTVOŘIT TŘÍDU

Kolineace mezi kružnicí a kuhloškou

Kolineace mezi kružnicí a elipsou

Kolineace mezi kružnicí a hyperbolou...

Kolineace mezi kružnicí a parabolou...

Kolineace příklad č.1 - první způsob

Kolineace příklad č.1 - druhý způsob

Kolineace příklad č.2 - první způsob

Kolineace příklad č.2 - druhý způsob

Kolineace příklad č.3

Kolineace příklad č.4

Kolineace příklad č.5

Kolineace mezi parabolou a hyperbolou...

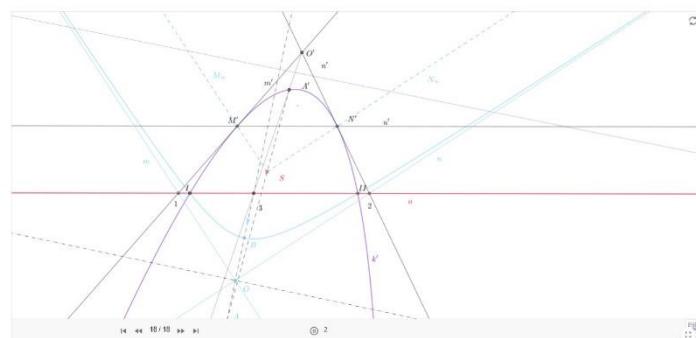
Konstrukce_P1

Konstrukce_H_1

Kolineace mezi parabolou a hyperbolou

Autor: Marie Chodorová

Sestrojte kolineární obraz parabolou K v kolineaci uvedené (S.o.u.).



Obr. 4: Kolineace mezi parabolou a hyperbolou

Literatura

- [1] L. Lomtatidze: *Historický vývoj pojmu křivka*, CERM, 2007, ISBN 8072044924
- [2] T. Cienciala: *Využití ITC ve výuce kuželoseček na středních školách*, Bakalářská práce, PřF UP, 2018
- [3] K. Havlíček: *Úvod do projektivní geometrie kuželoseček*, SNTL, Praha 1956

Plocha šikmého průchodu v nosné konstrukci historických mostů

Skew Arch and Load Bearing Structure of Historic Bridges

Dana Kolářová

*Dept. of load-bearing structures, Fac. of Architecture, Czech Technical University
Thákurova 9, 166 34 Prague 6, Czech Republic
kolarova@fa.cvut.cz*

Abstract. This article refers to the research of load bearing structures of historic bridges, in particular the use of warped ruled surfaces. It is focused on two skew arch railway bridges in the Czech republic (Negrelli viaduct in Prague and viaduct in Cheb) with different geometric solution of skew arch.

Keywords: Skew arch, load bearing structure, historic bridges, warped ruled surface, biais passé

Klíčová slova: Plocha šikmého průchodu, nosná konstrukce, historické mosty, zborcená přímková plocha

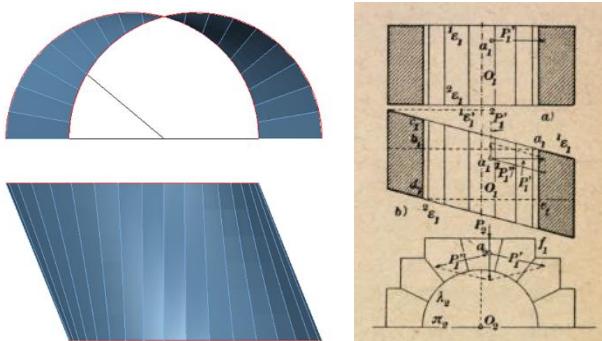
1 Úvod

Výzkum nosné konstrukce historických mostů slouží ke spolehlivějšímu určení památkové hodnoty těchto technických staveb, je zaměřen na upřesnění našeho poznání historických postupů při návrhu konstrukce. Pokud se zaměříme na zkoumání geometrie nosné konstrukce historických mostů, pak zde hrají zvláštní úlohu zborcené přímkové plochy. Středem zájmu výzkumu jsou kamenné a zděné mosty na území České republiky, kde například plocha „corne de vache“ je realizována na Mostě Legií v Praze a plocha šikmého průchodu, v pojetí, ve kterém ji najdeme v současných studijních materiálech většiny vysokých škol v České republice, je spojena s Negrelliho viaduktem v Praze v Karlíně. Příspěvek ukazuje širší souvislosti použití plochy šikmého průchodu v technické praxi.

2 Plocha šikmého průchodu

V průběhu uplynulého století se v našich učebnicích a skriptech posunul obsah pojmu plocha šikmého průchodu. Pokud je dnes užíván tento termín, pak je tím myšlena zborcená přímková plocha určená třemi řídícími útvary takto: dvě shodné kružnice (někdy jen půlkružnice), které leží ve vzájemně rovnoběžných rovinách a pro které platí, že spojnice jejich středů svírá s rovinami kružnic úhel různý od úhlu pravého, dále pak přímka procházející středem spojnice středů

kružnic a kolmá k rovinám těchto kružnic. Tato plocha je označována v zahraniční literatuře obvykle „biais passé“ (a to i v anglicky psané).



Obr. 1: Šikmý průchod (vlevo model v CADu, vpravo učebnice 3K str. 823)

Pokud studujeme plochu šikmého průchodu v souvislosti s výzkumem nosné konstrukce historických mostů, pak je třeba se vrátit k původnímu širšímu pojednání tohoto pojmu, například v učebnici Kadeřávek, Klíma, Kounovský Deskriptivní geometrie II z roku 1954 (str.823):

„Je-li směr osy valené klenby, kterou je umožněn průchod danou zdí, šikmý k lící této zdi, mluvíme o šikmém průchodu, klenba jemu příslušná je klenbou šikmého průchodu.“

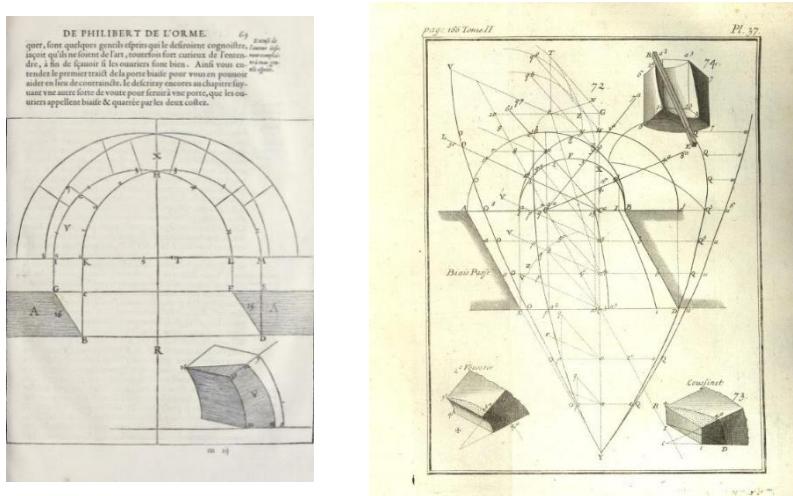
Klenba šikmého průchodu se v půdoryse zobrazuje jako rovnoběžník.

Řešení konstrukce klenby šikmého průchodu najdeme v textech o architektuře již od starověku, zde se jednalo o průchody malé šířky, teprve později je dané problematice věnována velká pozornost. Ve středověku ji nalézáme v publikacích o stereotomii, příkladem může být francouzské pojednání o architektuře z roku 1567 autora Philiberta de L'Orme.

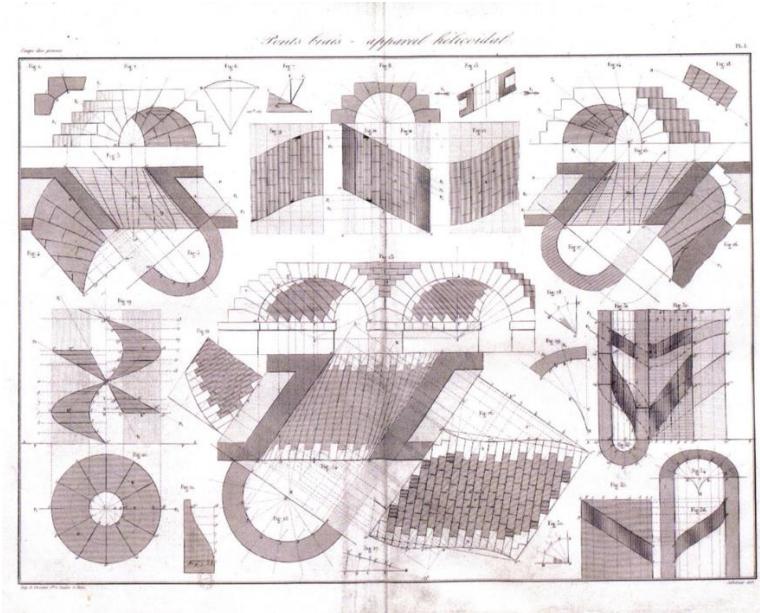
Zájem o řešení šikmého průchodu v dalších letech je obrovský, vzrůstá v souvislosti s rozvojem železniční dopravy, z mnoha autorů textů věnovaných problematice kamenořezu plochy šikmého průchodu lze jmenovat například Fréziéra (*La theorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois, pour la construction des voutes et autres parties des batimens civils & militaires, ou Traité de stereotomie a l'usage de l'architecture*, 1768), Adhemara (*Cours de mathématiques à l'usage de l'ingénieur civil: Application de géometrie descriptive : ponts biais, extrait du recueil des exercices et questions diverses*, 1834), Foxe (*On the construction of skew arches*, 1836), Loignona (*Ponts Biais*, 1872), ale i autory současné, například Xaviér (*On the Biais Passé*, 2016).

Potřeba rychlé výstavby železnice a ekonomická situace, kdy složitý kamenořez byl příliš drahý, vedly k hledání optimální metody řešení. Pojednání o všech typech provedení (helikoidální, logaritmické, ortogonální zřízení...) je plánováno na jaro 2022 v časopise G – Slovenský časopis pre geometriu

a grafiku. V pozdějších letech problematika ztrácí na významu s nástupem nových materiálů využívaných při stavbě mostů – beton, ocel.



Obr. 2: Stereotomie – šikmý průchod (vlevo L'Orme 1567, vpravo Fréziér 1768)



Obr. 3: Šikmý průchod – zřízení helikoidální (Adhémar 1834)

3 Železniční viadukty s klenbou šikmého průchodu

Uveďme zde dva příklady, kdy byla v odlišném provedení použita klenba šikmého průchodu použita u železničních viaduktů v Čechách, a to u Negrelliho viaduktu v Praze a u viaduktu přes Ohři v Chebu.

Negrelliho viadukt (také lze najít pod názvem Karlínský viadukt nebo pražský viadukt Společnosti státní dráhy) je druhým nejstarším mostem v Praze, byl vybudován v letech 1846-49 jako součást projektu pražsko-drážďanské dráhy, projekt je spojen se jménem Jana Pernera a Aloise Negrelliho. Celková délka byla 1100 m a do roku 1910 byl nejdelším mostem v Evropě.



Obr. 4: Negrelliho viadukt (vpravo plocha šikmého průchodu), foto autorka

Původní část mostu byla popsána následovně:

celkem 87 kleneb, z toho

8 segmentových kleneb ze žuly nad tokem Vltavy o světlosti 25,3 m,

27 půlkruhových kleneb o světlosti 10,75 m,

49 kleneb o světlosti 6,3-6,7 metrů z pískovce nebo cihel,

1 segmentová klenba v místě hlavní karlínské tepny se světlostí 11,3 a dvěma průchody

V popisu nosné konstrukce není nijak zdůrazněno, že velká segmentová klenba v Karlíně je klenba šikmého průchodu. Detail technického provedení této klenby projektanti neřešili. Ze současných zaměření provedených v souvislosti s rekonstrukcí (ukončenou v roce 2020) je zřejmé, že se opravdu jedná o zborcenou přímkovou plochu v podobě, jak je dnes představována v učebních textech studentům technických vysokých škol u nás.

Negrelliho viadukt je památkově chráněn.

Druhý viadukt, kde je řešena klenba šikmého průchodu zcela jinak, se nachází v Chebu. Byl postaven roku 1898 jako kamenný most, klenby byly provedeny z opracovaných žulových kvádrů, na konci druhé světové války byl značně poničen spojeneckými nálety a v roce 1946 rekonstruován s použitím železobetonových prvků. Jeho celková délka činí 348 metrů, maximální výška kolejíště nad hladinou Ohře je 25 metrů.

Zde je průchod rovnoměrně rozdělen na segmenty rovinami rovnoběžnými s lícem klenby a klenba v těchto segmentech řešena jako přímá. Z hlediska statických vlastností je toto řešení velmi vhodné.



Obr. 5: Chebský viadukt, foto Martin Pospíšil

4 Závěr

Výzkum geometrie nosné konstrukce historických mostů ukazuje v souvislostech dnes oddělené obory, kterými jsou deskriptivní geometrie, statika a dějiny architektury. Výsledky výzkumu, použité ve výuce na fakultě architektury ČVUT v Praze, napomáhají zlepšení mezipředmětových vztahů. Ve stavební praxi poznání geometrických principů konstrukce vede k lepšímu určení její památkové hodnoty.

Poděkování

Tento článek vznikl za podpory Studentské grantové soutěže ČVUT v Praze č. SGS19/198/OHK1/3T/15.

Literatura

- [1] ADHÉMAR, Joseph. Cours de mathématiques à l'usage de l'ingénieur civil: Application de géometrie descriptive: ponts biais, extrait du recueil des exercices et questions diverses. Paris, 1834.
- [2] CALVO-LÓPEZ, José. Stereotomy: Stone Construction and Geometry in Western Europe 1200-1900. Cham: Springer, 2020. ISBN 978-3-030-43217-1.
- [3] DE DARTEIN. Etudes sur les Ponts en Pierre remarquables par leur décoration. Paris: CH. Beranger, 1908.
- [4] DEGRAND, E. Ponts en maçonnerie: encyclopédie des travaux publics. Paris: Librairie Polytechnique, 1888.

- [5] DRÁBEK, Karel, František HARANT a Ota SETZER. Deskriptivní geometrie I. Praha: Nakladatelství technické literatury, 1978. Řada teoretické literatury.
- [6] FISCHER, Jan a Ondřej FISCHER. Pražské mosty. Praha: Academia, 1985. 21-137-85.
- [7] FOX, Charles. On the construction of skew arches. Architectural Magazine. London: Longman, Rees, Orme, Brown, Green and Longman, 1836, 3, 251-260.
- [8] FREZIÉR, Amédée Francois. La theorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois, pour la construction des voûtes et autres parties des batimens civils & militaires, ou Traité de stereotomie a l'usage de l'architecture. 2. Paris: rue Dauphine, chez Charles Antoine Jombert, libraire du roy pour l'artillerie & légénie, à l'image Notre Dame, 1768.
- [9] KADEŘÁVEK, František, Josef KLÍMA a Josef KOUNOVSKÝ. Deskriptivní geometrie. V Praze: Jednota čsl. matematiků a fysiků, 1932. Knihovna spisů matematických a fysikálních.
- [10] KOUNOVSKÝ, Josef. Zborcené plochy. Praha: Jednota čsl. matematiků a fysiků, 1947. Cesta k vědění.
- [11] LOIGNON, S. Ponts Biais. 1. Paris: Imprimerie Typographique et Lithographique de CH. Bernard, 1872.
- [12] L'ORME, Philibert de. Le premier tome de l'architectvre. Paris: Chez Federic Morel, 1567
- [13] PISKA, Rudolf a Václav MEDEK. Deskriptivní geometrie II. 2. rozš. a přeprac. vyd. Nakladatelství technické literatury: Alfa, 1975.
- [14] XAVIER, J.P. On the Biais Passé: The Olivier String Model and the Representation of Constructive Solutions for the Skew Arch. Handbook of Research on Visual Computing and Emerging Geometrical Design Tools. 1. Italy: Politecnico di Milano, 2016, s. 337-366. ISBN 9781522500292.

Fergusonovské scénare pre generovanie úsečky

Ferguson Scenarios for the Line Segment Drawing

Alexej Kolcun

*University of Ostrava,
Faculty of Science, University of Ostrava,
30. dubna 22, 710 00 Ostrava, Czech Republic
alexej.kolcun@osu.cz*

Abstract. When demonstrating the relationship between control elements and the resulting shape of parametric curves, textbooks are usually limited to the qualitative characterization of this relationship. In this paper, we formulate a few simple tasks, where we find more detailed - quantitative relationships between the control elements and the resulting shape for the Ferguson curve. The analysis is done for kinematic interpretation of various scenarios of line segment drawing.

Keywords: parametric modelling, Ferguson curve, Bézier curve, Coons curve, control point influence, kinematic interpretation of curve

Klúčové slová: parametrické modelovanie, Fergusonova krivka, Bézierova krivka, Coonsova krivka, vplyv kontrolného bodu, kinematická interpretácia krivky

1 Úvod

Kubické parametrické krivky tvoria dôležitý základ pre geometrické modelovacie systémy používané vo výuke i v technickej praxi. Dôvodom je, že kubické krivky sú polynomické krivky najnižšieho stupňa, ktoré dovoľujú predpísat polohu krajných bodov krivky a jej smer v krajných bodech. Priama formulácia, keď hľadáme

$$P(t), 0 \leq t \leq 1,$$

s okrajovými podmienkami

$$P(0) = P_0, P(1) = P_1, P'(0) = \vec{v}_0, P'(1) = \vec{v}_1, \quad (1)$$

vedie k riešeniu, napr. [3], [4], známemu ako Fergusonova krivka

$$\begin{aligned} P(t) = & (1 - 3t^2 + 2t^3)P_0 + (3t^2 - 2t^3)P_1 \\ & +(t - 2t^2 + t^3)\vec{v}_0 + (t^3 - t^2)\vec{v}_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Bézierovu kubickú krivku s riadiacimi bodami B_0, B_1, B_2, B_3

$$P(t) = (1 - t)^3 B_0 + 3(1 - t)^2 t B_1 + 3(1 - t)t^2 B_2 + t^3 B_3, \quad (3)$$

môžeme interpretovať ako Fergusonovu krivku [1] s okrajovými podmienkami

$$P_0 = B_0, P_1 = B_3, \vec{v}_0 = 3(B_1 - B_0), \vec{v}_1 = 3(B_3 - B_2). \quad (4)$$

Podobne i Coonsovou krivku s riadiacimi bodami C_0, C_1, C_2, C_3 ,

$$P(t) = \frac{(1-t)^3}{3} C_0 + \frac{4-6t^2+3t^3}{3} C_1 + \frac{1+3t+3t^2-3t^3}{3} C_2 + \frac{t^3}{3} C_3, \quad (5)$$

môžeme interpretovať ako krivku Fergusonovu [1] s okrajovými podmienkami

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{C_0+4C_1+C_2}{3}, & P_1 &= \frac{C_1+4C_2+C_3}{3}, \\ \vec{v}_0 &= \frac{C_2-C_0}{3}, & \vec{v}_1 &= \frac{C_3-C_1}{3}. \end{aligned} \quad (6)$$

V dostupnej odbornej literatúre i v učebných textoch sa spravidla dôraz kladie na kvalitatívne vlastnosti výsledných vzťahov v okolí krajných bodov krivky, konkrétnie na fakt, že smer konštruovanej krivky v krajných bodoch je úmerný predpísaným rýchlosťam v koncových bodoch (čo je vo svojej podstate predpoklad (1), ktorý do modelu vkladáme). Toto je samozrejme dôležité hlavne pri konštrukcii splajnov, tj. pri postupnom spojovaní elementárnych kriviek s požadovanou hladkosťou spojenia.

Výsledný tvar krivky však silne závisí i na *velkostiach* predpísaných rýchlosťí. Avšak s detailnejšou analýzou toho sa v učebničiach stretávame len veľmi okrajovo. Spravidla sa pri demonštrovaní vlastností danej krivky nevychádza za rámcu jednoduchých príkladov, keď sa riadiace body „vhodne“ zvolia [2], [5], [6], [7].

Považujeme za dôležité, aby študenti získali v tomto smere hlbšie vedomosti. Práve toto bolo motiváciou predloženého textu. Na jednoduchých príkladoch ukážeme závislosť výslednej trajektórie na výbere okrajových podmienok (predpísaných rýchlosťí).

Krivku chápeme v kinematickej interpretácii, tj. ako trajektóriu pohybujúceho sa bodu. V príspevku sa obmedzíme na jednorozmerný prípad – úsečku. Rôznym okrajovým vektorom tak odpovedajú rôzne scenáre jej vykreslenia.

Pre jednoduchosť (bez ujmy na všeobecnosti) môžeme zvoliť

$$P_0 = 0, P_1 = s, \vec{v}_0 = v_0, \vec{v}_1 = v_1,$$

čo zjednoduší vzťah pre trajektóriu,

$$x(t) = (3t^2 - 2t^3)s + (t - 2t^2 + t^3)v_0 + (-t^2 + t^3)v_1. \quad (7)$$

$$0 \leq t \leq 1.$$

Vzhľadom na to, že budeme analyzovať priebeh rýchlosťi vo vnútorných bodoch kubickej krivky,

$$x'(t) = (6t - 6t^2)s + (1 - 4t + 3t^2)v_0 + (3t^2 - 2t)v_1, \quad (8)$$

nevychádzame za rámec riešenia kvadratických rovníc. Preto je zvládnuteľné i pre študentov, u ktorých nepredpokladáme veľké matematické zručnosti.

2 Scenáre s rovnakou rýchlosťou na oboch koncoch

Pre $v_0 = v_1 = V$ vzťahy (7)-(8) sa ďalej zjednodušia na tvar

$$x(t) = (V - s)(2t^3 - 3t^2 + t) + st \quad (9)$$

$$\begin{aligned} x'(t) &= (V - s)(6t^2 - 6t + 1) + s = \\ &= 6(V - s) \left(t - \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} \right) \left(t - \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} \right) + s \end{aligned} \quad (10)$$

V prípade $V=s$ dostávame z (6) resp. zo (7) konštantnú rýchlosť na celom intervale, $v(t) = V = s$, čo odpovedá štandardnému parametrickému vyjadreniu úsečky (priamky). Naviac z (10) vidíme, Obr. 1, že nezávisle na počiatočnej rýchlosťi, v časoch

$$\tau_{1,2} = \frac{\sqrt{3} \mp 1}{2\sqrt{3}}$$

je rýchlosť pre všetky scenáre rovnaká, $v(\tau) = s$.

Extrémna rýchlosť

Zo vzťahu (10) vidíme, že extrémna rýchlosť sa dosahuje uprostred časového intervalu

$$v_{EXTR} = v\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3s-V}{2}.$$

V prípade $V = 3s$, je extrémom $v_{MIN} = 0$.

Trajektória so spätným chodom

V prípade $V > 3s$, tj. $v_{MIN} < 0$, tj. pohybujúci bod má uprostred intervalu spätný chod. Časové momenty v ktorom je rýchlosť nulová, (tj. prechádzame z priameho do spätného chodu a naopak) nájdeme štandardne riešením kvadratickej rovnice, ktorú dostaneme z (10)

$$t_{1,2} = \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{\frac{V-3s}{V-s}}. \quad (11)$$

V limitnom prípade, $V \rightarrow \infty$ dostávame $t_{1,2} \rightarrow \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Aká veľká môže byť trajektória spätného chodu? Napr. prípad, že spätný chodom prejdeme celú úsečku určenú koncovými bodmi, získame riešením rovnice (vychádzajúc z (9))

$$x(t) = t[(V - s)(2t^3 - 3t^2 + t) + s] = 0. \quad (12)$$

Kedžže počiatočný bod $x(t) = 0$ pri spätnom chode musíme dosiahnuť v jedinom čase $t > 1$, hľadáme dvojnásobný koreň príslušnej kvadratickej rovnice ((12) v hranatých zátvorkách), čo dostaneme pre $V = 9s$.

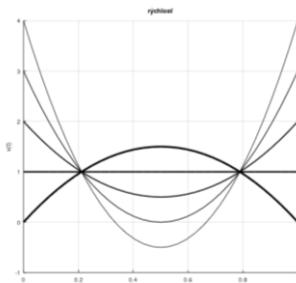
Dosadením do (11) nájdeme časy zvratu medzi priamym a spätným chodom

$$t_{1,2} = \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{\frac{9s-3s}{9s-s}} = \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \mp \frac{1}{4}.$$

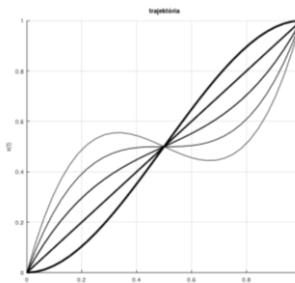
Vo všeobecnom prípade polohu bodov obratu získame dosadením (11) do (9),

$$x_{MAX, MIN} = \frac{s}{2} \pm \frac{V-3s}{3} \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{\frac{V-3s}{V-s}}.$$

Vidíme, že s rastúcou hodnotou rýchlosťi $V \rightarrow \infty$, poloha bodu obratu sa "linearizuje".



a)



b)

Obr. 1: Príklady a) rýchlosťi a b) trajektória pre Fergusonovu krivku pre rovnaké hodnoty rýchlosťi v koncových bodoch. Odpovedajúce si rýchlosťi a trajektórie sú zobrazené rovnako hrubou čiarou.

3 Scenáre s nulovou rýchlosťou na jednom konci

Bez obmedzenia všeobecnosti môžeme predpokladať

$$P(0) = 0, P(1) = s, v_0 = 0, v_1 = V. \quad (13)$$

Potom pre trajektóriu a rýchlosť dostávame vzťahy

$$x(t) = (3t^2 - 2t^3)s + (t^3 - t^2)V = t^2(3s - V) + t^3(V - 2s), \quad (14)$$

$$v(t) = x'(t) = 2t(3s - V) + 3t^2(V - 2s), \quad (15)$$

Je ľahko vidieť, že pre $3t^2V - 2tV = 0$, tj. pre $t = \frac{2}{3}$ nezávisle na zvolenej koncovej rýchlosťi V , je

$$v\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4s}{3}.$$

Vidno taktiež, že pre $V = 2s$ rýchlosť rastie lineárne,

$$v(t) = 2t(3s - 2s) = 2st.$$

Ponúkajú sa zovšeobecnenia:

- Pre aké hodnoty V rastie rýchlosť monotónne? Tj. pre aké V je na celom intervale $0 \leq t \leq 1$ zrýchlenie kladné?

Kedže

$$a(t) = v'(t) = 2(3s - V) + 6t(V - 2s),$$

pre $V < 2s$ je lineárny člen záporný, tj. ak má byť zrýchlenie väčšie ako nula na celom intervale, musí to byť i na pravom konci, tj. pre $t = 1$, tj.

$$3s - V + 3(V - 2s) > 0,$$

$$V > \frac{3}{2}s.$$

Pre $V > 2s$ je lineárny člen kladný, tj. ak má byť zrýchlenie kladné na celom intervale, musí byť taký i na ľavom konci, tj. pre $t = 0$, tj.

$$3s - V > 0,$$

$$V < 3s.$$

Pre $V > 3s$ je na začiatku záporné zrýchlenie, tj. sila je orientovaná doľava, a preto zákonite doľava je orientovaná i rýchlosť, no a tým pádom i trajektória. (Bod musí „poostúpiť“, aby sa mohol rozbehnúť a dosiahnuť požadovanú rýchlosť práve v čase $t = 1$.)

No a zákonite vznikajú otázky typu:

- V akom čase $t > 0$ nastáva bod zvratu, tj. $v(t) = 0$?

$$v(t) = 2t(3s - V) + 3t^2(V - 2s) = 0,$$

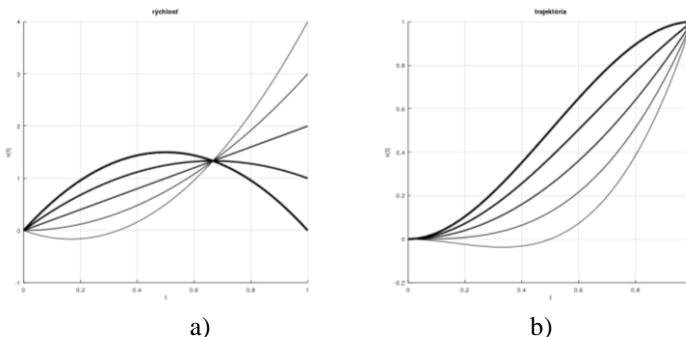
$$= t(2(3s - V) + 3t(V - 2s)) = 0,$$

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{2V-3s}{3V-2s},$$

- Kde sa nachádza poloha bodu zvratu ?

$$x(t_2) = t_2^2[(3s - V) + t_2(V - 2s)] = -\frac{4}{27} \left(\frac{V-3s}{V-2s}\right)^2 (V - 3s),$$

- Aká musí byť požadovaná rýchlosť, aby poloha bodu zvratu dosiahla veľkosť samotného intervalu s ?



Obr. 2: Príklady a) rýchlosť a b) trajektória pre Fergusonovu krivku s nulovou rýchlosťou na ľavom konci. Odpovedajúce si rýchlosťi a trajektórie sú zobrazené rovnako hrubou čiarou.

4 Záver

V príspevku sme ukázali vplyv predpísaných koncových rýchlosťí na výsledný fergusonovský scenár generovania úsečky. Výsledná analýza nevychádza za rámec riešenia kvadratickej rovnice, a preto je zvládnuteľná i pre študentov, u ktorých nepredpokladáme veľké matematické zručnosti. Z druhej strany, i tak silné zjednodušenie modelu má svoje opodstatnenie pri vysvetľovaní CAD/CAM technológií.

Pod'akovanie

Tento článok vznikol s inštitucionálnou podporou rozvoja KIP PřF Ostravskej univerzity.

Literatúra

- [1] G. Farin, J. Hoshek, M.S. Kim: *Handbook of Computer Aided Geometric Design*. North-Holland 2002.
- [2] Ferko, A., Ružický, E.: *Počítačová grafika a spracovanie obrazu*. Sapientia 1995.
- [3] J.D. Foley et al.: *Computer Graphics: Principles and Practice in C* (2nd ed.). Addison Wesley. 1992.
- [4] Kolcun, A.: Vybrané úlohy o Bézierovej krivke. In: *Czech-Slovak Conference on Geometry and Graphics 2020*, (P. Surynková, Z. Šír, M. Lávička, eds.). Vydavatelský servis 2020.
- [5] Linkeová, I.: *NURBS krivky*. Nakladatelství ČVUT 2007.
- [6] Martíšek, D.: *Matematické princípy grafických systémů*. Littera 2002.
- [7] Žára, J. et al.: *Moderní počítačová grafika*. Computerpress 2004.

Voronoi Diagram in Three-Dimensional Hyperbolic Space

Alžbeta Mackovová, Pavel Chalmovianský

Department of algebra and geometry

Mlynská dolina, 842 84 Bratislava, Slovak Republic

alzbeta.mackovova@fmph.uniba.sk, pavel.chalmoviansky@fmph.uniba.sk

Abstract. Voronoi diagrams belong to favourite structures in computational geometry. In our work, we focus on construction and properties of Voronoi diagram in three-dimensional hyperbolic space represented by Poincaré ball model. First, we recall and illustrate the basic geometric elements of Poincaré ball model. Then, we construct a hyperbolic Voronoi diagram and we describe some of its properties, which depend on the position of its generators.

Keywords: Voronoi diagram, hyperbolic geometry, Poincaré disk model, Poincaré ball model

1 Introduction

In our previous work, we focused on study of the Voronoi diagram in hyperbolic plane, which was represented by Poincaré disk model [2]. We described the properties of hyperbolic Voronoi diagram and we observed their change as one generator move along the hyperbolic line-segment [3]. We will focus now on building an analogous theory in hyperbolic 3D.

The theory about Voronoi diagram in Euclidean m -dimensional space is already well known [8], [1]. Also, there are some results about Voronoi diagram in hyperbolic plane [4], [7], in hyperbolic three-dimensional space represented by upper half-space model [6] or in arbitrary dimension [5]. But following on from our previous work, we use the Poincaré ball model for representing three dimensional hyperbolic space. This model is a natural extension of Poincaré disk model in hyperbolic plane into the hyperbolic space, so many planar properties and objects are transferred to higher dimension as in Euclidean geometry.

First of all, we introduce the workspace – Poincaré ball model and its basic elements. Subsequently we construct a hyperbolic Voronoi diagram and we describe its properties and difference with Euclidean Voronoi diagram. Our resulting findings about hyperbolic Voronoi diagram have a major impact on its dual graph – Delaunay tessellation. We abbreviate adjective *hyperbolic* with *h-*, so we use notions like h-line, h-circle, h-sphere, etc.

2 The Poincaré ball model of hyperbolic space

The Poincaré ball model is three-dimensional space defined as

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$$

with particular hyperbolic metric

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)^2}.$$

We represent this model with an open ball of unit radius. The boundary $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ of model is called a *main sphere* and its points are called *ideal points*. The ideal points play role of the points at infinity.

Let us define and illustrate h-lines, h-circles, horocycles and hypercycles, which are planar objects, using a disk model in the space (fig. 1). Consider any plane ρ incident with the center S of unit ball. This plane intersect ball model in open unit disk, the boundary of which is called *the main circle*. Let k be a circle in Euclidean geometry. If the circle k

- is inside the ball \mathbb{S}^2 , then it is also a *hyperbolic circle*, but its Euclidean centre and its hyperbolic center are in general different;
- is tangent to the corresponding main circle at one ideal point, then it is called a *horocycle* and its h-center is in this ideal point;
- is intersecting the corresponding main circle and it is perpendicular to it, then it is called a *h-line*;
- is intersecting a corresponding main circle but it is not perpendicular to it, then is called a *hypercycles*.

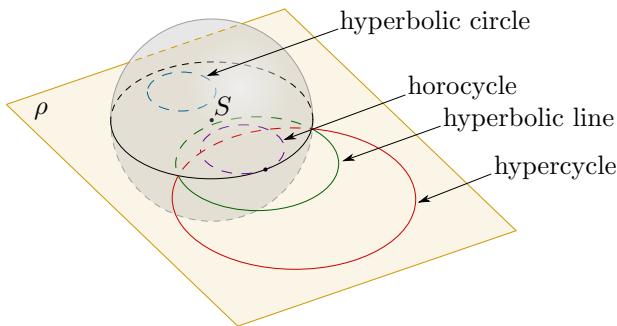


Figure 1: Planar objects of hyperbolic space.

Analogously, we define spatial objects, by extending these objects by the third dimension (fig. 2). Let \mathbb{G} be a a sphere in Euclidean geometry. If the sphere G

- is inside the ball \mathbb{S}^2 , then it is also a *h-sphere*, but its Euclidean and its hyperbolic centres are in general different;
- is tangent to the main ball at one ideal point, then it is called a *horosphere* and its h-center is in this ideal point;

- is intersecting main ball and it is perpendicular to it, then it is a *h-plane*;
- is intersecting main ball and it is not perpendicular to it, then it is called a *hypersphere*.

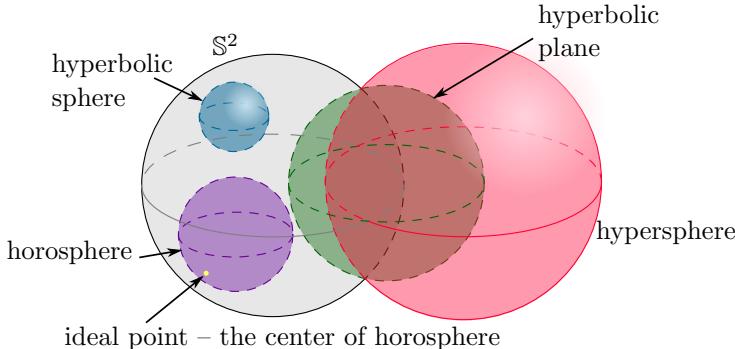


Figure 2: Spatial objects of hyperbolic space.

3 Three-dimensional hyperbolic Voronoi diagram

If the finite set $P = \{p_1, \dots, p_n\} \in \mathbb{S}^2$ of distinct points is given, where $2 < n < \infty$, then we call the region given by

$$V(p_i) = \{x \in \mathbb{S}^2 : d(p_i, x) \leq d(p_j, x), \text{ for } i \neq j; i, j \in I_n = \{1, \dots, n\}\}$$

the *hyperbolic Voronoi polyhedron* associated with p_i , and the set given by $\mathcal{V}(P) = \{V(p_1), \dots, V(p_n)\}$ is the *hyperbolic Voronoi diagram* generated by the set P of its generators. A Voronoi h-polyhedron is a closed set, so it contains also its boundaries which are called *Voronoi h-facets* – parts of spheres. It is a set of points, that are common for two adjacent Voronoi h-polyhedrons. The boundaries of Voronoi h-facets are called *Voronoi h-edges*, they can be h-line segments, h-rays or h-lines, and they are intersecting in *Voronoi h-vertices*. Voronoi h-edge might be mutual edge for three or more Voronoi h-polyhedrons, whose generators lie on an Euclidean sphere. Voronoi h-vertex might be mutual vertex for four or more Voronoi h-edges, respectively Voronoi h-polyhedrons.

In fact the Voronoi h-polyhedron for the generator p_i is the set of points closer to the generator p_i comparing to any other generator. From this definition, one can see that the Voronoi h-facet common for two generator p_i, p_j with adjacent Voronoi h-polyhedrons $V(p_i), V(p_j)$, is a part of h-bisector plane of p_i and p_j . We illustrate a hyperbolic Voronoi diagram on the figure 3 from three different points of view.

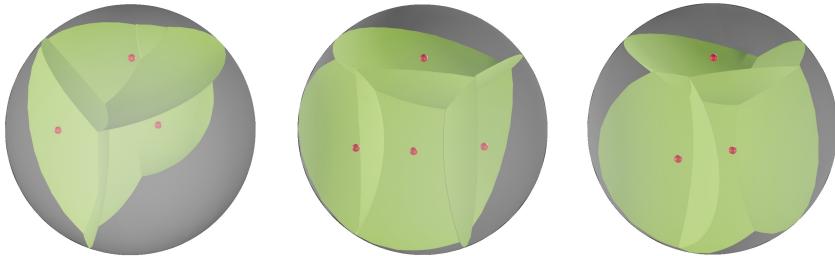


Figure 3: Non-degenerate hyperbolic Voronoi diagram for four points in hyperbolic three-dimensional space.

Based on our previous results from Poincaré disk model and on the properties of basic elements of Poincaré ball model, we identify the following problems:

1. In Euclidean 3-dimensional space, every three generators in generic position form a triangle. Let us consider the circumcircle of the triangle as the equator of a sphere. We called such a sphere a circumsphere of the triangle. Let this circumsphere be empty, i. e. there is no other generator inside or on the circumsphere. Then we construct bisector planes of the line-segments given by these three generators. These bisector planes intersect in unique line incident with the center of this circumsphere. Clearly, it is the axis of the circumsphere. Each bisector planes contain a Voronoi face and part of this axis form a Voronoi edge.
2. In Euclidean 3-dimensional space, every four noncoplanar generators form a tetrahedron. These generators lie on an unique sphere called circumsphere of the tetrahedron. The bisector planes – its parts form the Voronoi facets – of the line-segments given by these four generators meet in the center of this sphere – Voronoi vertex.

Both cases are true also in hyperbolic geometry. But what we have to be careful about is the type of circumsphere in hyperbolic sense. In case, when circumsphere is in hyperbolic sense a h-plane, horosphere or hypersphere, its h-center – Voronoi h-vertex – is ideal or external point of Poincaré ball model. Depending on that, the resulting Voronoi h-diagram may have fewer facets, edges and vertices compared to the Euclidean Voronoi diagram for the same set of generators.

3. Furthermore, as in Euclidean geometry, we call the hyperbolic Voronoi diagram degenerate if
 - (a) four or more Voronoi h-facets meet in one Voronoi h-edge,

(b) five and more Voronoi h-edges meet in one Voronoi h-vertex.

To ensure, that these problems do not occur, we observe the validity, respectively invalidity, of the following assumptions.

Hyperbolic non-coplanarity assumption:

For a given set of points $P = \{p_1, \dots, p_n\} \in \mathbb{H}^2$, ($3 \leq n < \infty$), there is no h-plane μ such that the points $p_{i_1}, \dots, p_{i_k} \in P$, ($k \geq 3$) lie on the h-plane μ and all the other points of $P \setminus \{p_{i_1}, \dots, p_{i_k}\}$ are in the same half-space given by the h-plane μ .

Horosphere assumption:

For the given set of points $P = \{p_1, \dots, p_n\} \in \mathbb{H}^2$, ($3 \leq n < \infty$), there is no horosphere α such that the points $p_{i_1}, \dots, p_{i_k} \in P$, ($k \geq 3$) lie on the horosphere α and all the other points of $P \setminus \{p_{i_1}, \dots, p_{i_k}\}$ are the external points of the horosphere α .

Hypersphere assumption:

For the given set of points $P = \{p_1, \dots, p_n\} \in \mathbb{H}^2$, ($3 \leq n < \infty$), there is no hypersphere β such that the points $p_{i_1}, \dots, p_{i_k} \in P$, ($k \geq 3$) lie on the hypersphere β and all the other points of $P \setminus \{p_{i_1}, \dots, p_{i_k}\}$ are the external points of the hypersphere β .

Hyperbolic sphere assumption:

For a given set of points $P = \{p_1, \dots, p_n\} \in \mathbb{H}^2$, ($4 \leq n < \infty$), there is no h-sphere δ such that the points $p_{i_1}, \dots, p_{i_k} \in P$, ($k \geq 4$) lie on the h-sphere δ and all the other points of $P \setminus \{p_{i_1}, \dots, p_{i_k}\}$ are the external points of the h-sphere δ .

It is not surprising that these conditions are just an extension of assumptions from a planar case. We illustrate the case, when four generators (the red points) of hyperbolic Voronoi diagram lie on the hypercycle (the blue part of sphere) from three different points of view on the figure 4.

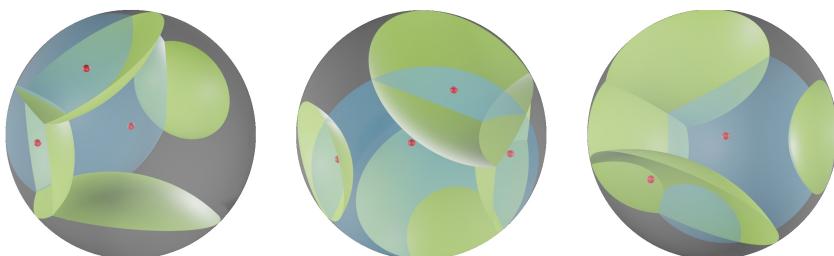


Figure 4: Hyperbolic Voronoi diagram which does not meet a hypersphere assumption.

4 Conclusion

Further, we are interested in the validity or invalidity of these conditions, because we can observe the difference between the Euclidean and hyperbolic Voronoi diagram for the same set of generators in the number of facets, edges and vertices. In addition, it affects the existence of a dual graph – Delaunay tesselation of the given hyperbolic Voronoi diagram. We can not use the term "tetrahedralization", because the result of dual tesselation does not have to be a tetrahedralization.

Now we know the behaviour of Voronoi diagram in three-dimensional hyperbolic space. For the future, we would like to construct the dynamic version of three-dimensional hyperbolic Voronoi diagram while one of the generator is moving along the h-line segment, h-sphere or in the h-plane and observe the validity of these assumptions.

Acknowledgements

This work was supported by the Slovak Research and Development Agency under the contract No. APVV-16-0053.

References

- [1] F. Aurenhammer, R. Klein and D. S. Lee: *Voronoi diagrams and Delaunay triangulations*, World Scientific Publishing Co., Inc., 2013.
- [2] A. Mackovová, P. Chalmovianský: *Voronoi diagram in hyperbolic geometry*, Proceedings of the Slovak-Czech Conference on Geometry and Graphics 2019 1. vyd. Bratislava : Vydavatelstvo SCHK, 2019, s. 119-124.
- [3] A. Mackovová, P. Chalmovianský: *Dynamic Voronoi diagram in hyperbolic geometry*, Proceedings of the Czech-Slovak Conference on Geometry and Graphics 2020 1. vyd. Plzeň : Vydavatelský servis, 2020, s. 117-122.
- [4] F. Nielsen and R. Nock: *Hyperbolic voronoi diagrams made easy*, CoRR, <http://arxiv.org/abs/1210.8234>, 2012, Accessed: 2021-15-10.
- [5] F. Nielsen and R. Nock: *The hyperbolic voronoi diagram in arbitrary dimension*, ArXiv, abs/1210.8234, 2012.
- [6] Z. Nilforoushana, A. Mohades, M.M. Rezaii, A. Lalehb: *3D hyperbolic Voronoi diagrams*, Computer-Aided Design, Elsevier, vol. 42, no. 9, p. 759-767, 2010.
- [7] Z. Nilforoushan and A. Mohades: *Hyperbolic voronoi diagram*, In Gavrilova M.L. et al. (eds) Computational Science and Its Applications - ICCSA 2006, volume 3984. Springer, Berlin, Heidelberg, 2006.
- [8] A. Okabe, B. Boots, K. Sugihara and S. Nok Chiu: *Spatial Tesselations: Concepts and Applications od Voronoi Diagrams*, Hoboken, New Jersey, USA: John Wiley and Sons, 2010. 696 s. ISBN: 978-0-471-98635-5.

Mesh Refinement Near Singularities

Marcel Makovník, Pavel Chalmovianský

Department of algebra and geometry

Mlynská dolina, 842 48 Bratislava, Slovak Republic

marcel.makovnik@fmph.uniba.sk, pavel.chalmoviansky@fmph.uniba.sk

Abstract. Mesh refinement via quadric fitting takes point-normal pairs as an input. Singularities in such mesh are obtained by assigning zero normal vector to the input point. In this paper, we inspect on the behaviour of the refinement near the singularity with respect to connectivity of the mesh. We provide examples of refinement on synthetic and real data.

Keywords: subdivision, mesh procesing, singularities, implicit surface.

1 Introduction

The refinement schemes for polygon meshes usually aim to produce smooth limit surfaces. The occurrence of singular points is often undesired. The vicinity of such points needs to be analysed separately and the conditions for the desired order of continuity are formulated in order to avoid singularities [3, 5].

However, singularities naturally appear in implicit surfaces. Quadric fitting refinement (QFR) uses approximation of a certain part of the input mesh by a quadric surface. There are three types of real quadrics with singularities – cone (*isolated singularity*), intersecting planes (*singularities on the line*) and coincident planes (*all points are singular*).

In our work, we use quadric fitting refinement for meshes with triangular or quadrilateral faces (tri/quad meshes), where several input points are singular. We inspect on behaviour near the singularities, mainly with respect to the edge connectivity near the singularities. The presence of singular points may be used to represent implicit surfaces with singularities or as a modelling tool to create spikes, cusps or even sharp edges.

2 Implicit surface and singularities

To define a singular point on a polygon mesh we use the notion of the singularity on an implicit surface as a motivation [4].

Definition 2.1. Let $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ be a real valued function of three variables. Then, an *implicit surface* $\mathcal{Z}(g)$ is the set of all zeros of g , i. e.

$$\mathcal{Z}(g) = \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid g(x, y, z) = 0\}. \quad (1)$$

The singular point of the implicit surface is such point, that all the partial derivatives of the function g vanish.

Definition 2.2. The *gradient* of the function g at the point $(x, y, z)^\top$ is the vector

$$\nabla g(x, y, z) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) \right)^\top. \quad (2)$$

The point $(x, y, z)^\top \in \mathcal{I}$ is called *singular* if $\nabla g(x, y, z) = \mathbf{0}$.

The gradient of the function g at the point $(x, y, z)^\top \in \mathcal{I}$ represents the normal vector of this surface. Since we represent the mesh as a set of point-normal pairs, connected by edges, the singular vertices of the input mesh may be characterized by setting the associated normal vector to the zero vector, i. e. pairs of form $(P, \mathbf{0})$.

3 Refinement of triangles and quadrilaterals

Consider the input mesh \mathcal{M} , created by point-normal pairs (P, \mathbf{n}) . These are connected by edges and formed into faces, which are either triangular or quadrilateral. For each $(P, \mathbf{n}) \in \mathcal{M}$ we assign a neighbourhood $\mathcal{H} = \{(P_i, \mathbf{n}_i)\}, i = 1, \dots, m$, $P_i = (x_{P_i}, y_{P_i}, z_{P_i})^\top$, $\mathbf{n}_i = (x_{\mathbf{n}_i}, y_{\mathbf{n}_i}, z_{\mathbf{n}_i})^\top$, where $m \geq 5$ and the point-normal $(P, \mathbf{n}) \in \mathcal{H}$. For this neighbourhood, we find a quadric surface Q with equation $q(x, y, z) = 0$ with coefficients stored in the vector \mathbf{a} , by solving the equality constrained quadratic programming (QP) problem

$$\begin{aligned} & \text{minimize } f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^m (w_i q^2(x_{P_i}, y_{P_i}, z_{P_i}) + \omega_i \|\nabla q(x_{P_i}, y_{P_i}, z_{P_i}) - \mathbf{n}_i\|^2), \quad w_i, \omega_i \neq 0 \\ & \text{subject to } \mathbf{E}\mathbf{a}^\top = \mathbf{d}. \end{aligned} \quad (3)$$

By developing the objective function $f(\mathbf{a})$, which measures the algebraic distance between a point and quadric, and the deviation between a normal vector and gradient, we get the desired form $\frac{1}{2}\mathbf{a}\mathbf{Q}\mathbf{a}^\top + \mathbf{a}\mathbf{c}^\top + \varepsilon$ for solving the QP problem. The matrix \mathbf{E} and the vector \mathbf{d} determine the equality constraints, so the quadric interpolates the point $P = (x_P, y_P, z_P)^\top$ and the normal $\mathbf{n} = (x_n, y_n, z_n)^\top$, i. e. the following holds:

$$\begin{aligned} q(x_P, y_P, z_P) &= 0, \\ \frac{\partial q}{\partial x}(x_P, y_P, z_P) &= x_n, \\ \frac{\partial q}{\partial y}(x_P, y_P, z_P) &= y_n, \\ \frac{\partial q}{\partial z}(x_P, y_P, z_P) &= z_n. \end{aligned} \quad (4)$$

The topological step of the refinement uses 1-to-4 split, similarly as in Loop scheme [1] for triangles and Catmull-Clark [2] scheme for quadrilaterals. Since each of the quadrics is interpolating its associated point-normal, we need to determine the position only for the newly inserted point-normals.

For both triangular and quadrilateral faces we add the edge point as follows. Consider the edge, created by points P_i, P_j and denote the equations of the associated quadrics \mathcal{Q}_i and \mathcal{Q}_j by $q_i(x, y, z) = 0$ and $q_j(x, y, z) = 0$, respectively. The edge point is computed as a footpoint of the point $1/2P_i + 1/2P_j$ onto the quadric $1/2q_i(x, y, z) + 1/2q_j(x, y, z) = 0$, i. e. the projection of the midpoint of the edge onto the metamorphosis of the quadrics \mathcal{Q}_i and \mathcal{Q}_j .

To split quadrilateral faces we also need to introduce the face point. Denote by P_i, P_j, P_k, P_l and $q_i(x, y, z), q_j(x, y, z), q_k(x, y, z), q_l(x, y, z)$ the vertices of the quadrilateral and their respective quadratic equations. The face point is computed as projection of the barycentre $1/4P_i + 1/4P_j + 1/4P_k + 1/4P_l$ onto the quadric given by $1/4q_i(x, y, z) + 1/4q_j(x, y, z) + 1/4q_k(x, y, z) + 1/4q_l(x, y, z) = 0$.

4 Refinement near singularities

As previously mentioned, the singular point-normal pairs of the input mesh have form $(P, \mathbf{0})$. Let the fitted quadric \mathcal{Q} interpolate the point-normal $(P, \mathbf{0})$. Then, \mathcal{Q} is singular at that point as well. This means, that the fitted quadric might be either real cone, intersecting planes or coincident planes.

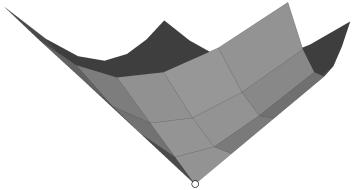
The type of the fitted quadric depends on the number and position of the singular points within the neighbourhood \mathcal{H} . We enlist several cases which have been inspected.

All points of the neighbourhood are singular – in such case, the QP problem (3) yields a homogeneous system of linear equations, so there is no unique solution of the system.

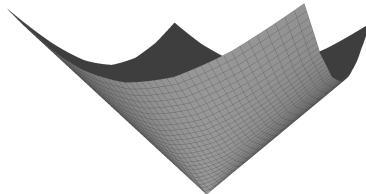
Three collinear points are singular – denote by $(P_0, \mathbf{0}), (P_1, \mathbf{0}) \in \mathcal{H}$ the point-normal pairs, whose points share the common edge with P , and let P_0, P, P_1 be collinear. Then, the fitted quadric \mathcal{Q} is intersecting planes.

Only P is singular – in this case the fitted quadric is a real cone, since it is the only type of quadric with isolated singularity.

In other situations (e. g. two singular points in \mathcal{H}), the fitted quadric is a cone, as implied by our experiments. However, it needs to be thoroughly examined, that there are no other situations, where the fitted quadric may be of other type.

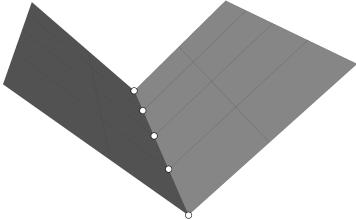


(a) Input mesh of cone. The singularity at the apex is highlighted by the white circle.

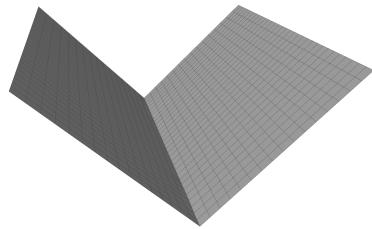


(b) The mesh after 3 iterations of the refinement. The singularity at the apex is retained.

Figure 1: Refinement of the cone.



(a) Input mesh of the intersecting half-planes. The singularities on the intersection line are highlighted by the white circles.



(b) The mesh after 3 iterations of the refinement. The singularities on the intersection lines are retained.

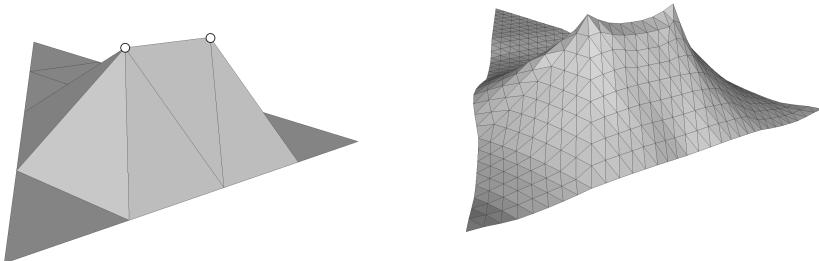
Figure 2: Refinement of the intersecting half-planes.

5 Experimental results

Firstly, we tested the refinement of the meshes of a half-cone and intersecting half-planes. As we see in the figure 1, the isolated singularity is retained after refinement. In the case of the half-planes the singularities on the intersection line are preserved, see the figure 2. More precisely, the inserted edge point is singular, if the edge consists of singular points, whose fitting quadrics are intersecting planes.

Consider now the mesh with an edge, whose endpoints P_0 and P_1 are singular and no more singularities are present in the vicinity of this edge. Then the inserted edge point is not singular, since the associated quadrics Q_0, Q_1 are cones, see the figure 3.

The notable situation occurs in the case of the refinement of a cube. To get the best possible result, we set the associated normals of the points on the edges and at the corners of the cube to zero vectors (the figure 4 (a)).



(a) Input mesh with two neighbouring singularities. The singularities on the mesh are highlighted by the white circles.

(b) The mesh after 3 iterations of the refinement. The original singularities are retained, however the inserted edge points do not lie on a line.

Figure 3: Refinement of the mesh with two neighbouring singularities.

The normals at the face of the cube are set with respect to the underlying planes. As we see in the figure 4 (b), the refinement in the interior of the edges preserves the lines, since the fitting quadrics are intersecting planes. However, in the case of the cube corners, the fitting quadric is a cone, which causes deformation in the vicinity of the corners. To preserve the lines in the vicinity of the cube corner, the fitting surface should be three intersecting planes, which is, however, not a quadratic surface.

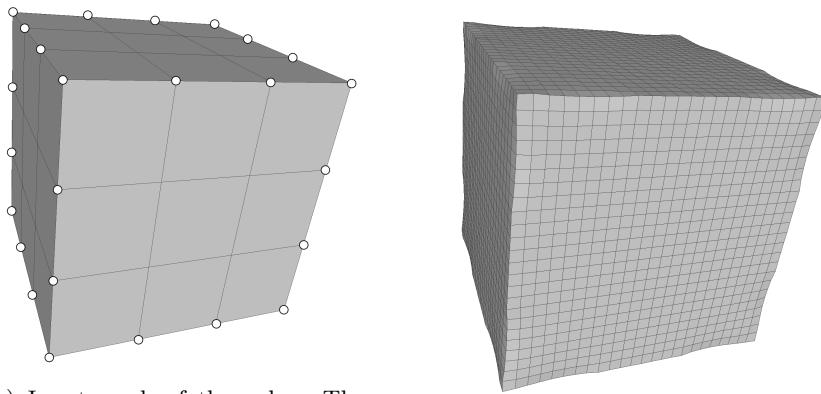
6 Conclusion

In this paper, we inspected on the quadric fitting refinement of tri/quad meshes near singularities, which were characterized by assigning zero normal vector to a point.

We analysed several positions of the singularity within the neighbourhood with respect to the connectivity (e. g. isolated singularity) and its influence on the fitted quadric. The problem arises, when the minimization of the objective function leads to the homogeneous system of linear equations, i. e. when all points of the neighbourhood are singular. We plan to inspect on such situations by obtaining the coefficients of the quadric using the singular value decomposition.

In the last part we provided several examples to demonstrate that the refinement retains isolated singularities and the interior of the singular lines. We reached a limitation in the attempt of reproduction of the polynomial surface of the third degree (three intersecting planes in the vicinity of the corner of the cube), since the fitted surface was a cone. Thus the newly inserted point-normals were not singular.

We plan to extend the study of the behaviour near the singularities for



(a) Input mesh of the cube. The singularities on the mesh are highlighted by the white circles.

(b) The mesh after 3 iterations of the refinement.

Figure 4: Refinement of the cube.

the meshes with singular polyline. The aim is to explore the possibility to use the refinement for modelling of the embankment surfaces. More precisely, we will focus on the refinement near the singular polyline, i. e. if the singular limit curve might be obtained.

Acknowledgements

This work was supported by the Slovak Research and Development Agency under the contract No. APVV-16-0053.

References

- [1] C. Loop: *Smooth subdivision surfaces based on triangles*, Master's thesis, University of Utah, 1987.
- [2] E. Catmull, J. Clark: *Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes*, Computer-aided design 10.6, p. 350–355, 1997.
- [3] P. Jörg, U. Reif: *Subdivision surfaces*, Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [4] A. Gomes, I. Voiculescu, J. Jorge, B. Wyvill, C. Galbraith: *Implicit curves and surfaces: mathematics, data structures and algorithms*, Springer Science & Business Media, 2009.
- [5] P. Grohs, M. Holler, A. Weinmann: *Handbook of Variational Methods for Nonlinear Geometric Data*, Springer Nature, 2020.

On One Property of Chords of Conics

Pavel Pech

*University of South Bohemia, Faculty of Education,
Jeronýmova 10, 371 15 České Budějovice, Czech Republic
pech@pf.jcu.cz*

Abstract. In the text the following property of chords of conic sections is investigated. Consider a conic, an arbitrary point O and points U, V on the conic such that $OV \perp OU$. Then the locus of the foot P of the normal from O to the line UV when U moves along the conic is a circle (or a line in particular cases). Firstly the locus is explored using dynamic geometry software GeoGebra, secondly using computer algebra system CoCoA the locus equation is derived. The locus is related to well-known theorems and concepts, as Simson line and Frégier point.

Keywords: Conic sections, chord of conics, elimination ideal, Frégier point.

1 Introduction

We will investigate the following problem:

Let UV be a chord of an ellipse centered at O such that $OU \perp OV$. Determine the locus of the foot P of the perpendicular from O to the chord UV when U moves along the ellipse.

Using the command Locus in GeoGebra it seems that the locus is a circle,

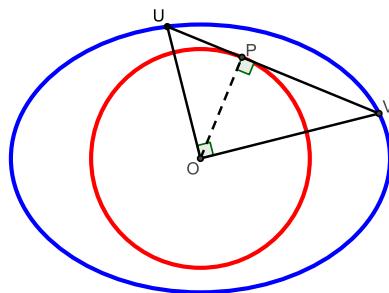
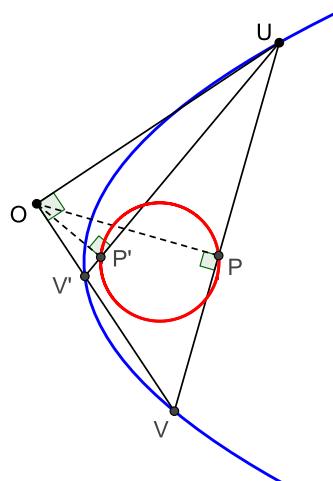


Figure 1: Determine the locus of P when U moves along the ellipse

see Fig. 1.

It turns out that the point O may not be at the center of a conic. This enables to use this construction for all conics, Fig. 2.

Figure 2: The locus of P is a circle

2 Locus equation

Based on previous constructions we formulate the following theorem:

Theorem 1: *Given a conic κ , a point U in κ and an arbitrary point O . Let $V \in \kappa$ be such that $OV \perp OU$. Then the locus of the foot P of the perpendicular from O to the line UV when U moves along the conic is:*

- a) a circle if κ is not an equilateral hyperbola or a pair of mutually orthogonal lines,
- b) a line if κ is an equilateral hyperbola or a pair of mutually orthogonal lines.

Proof. Consider a conic

$$\kappa : ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0. \quad (1)$$

Choose a rectangular system of coordinates such that $O = [r, s]$, $U = [u_1, u_2]$, $V = [v_1, v_2]$, and $P = [p, q]$, Fig. 3. Then:

$$U \in \kappa \Leftrightarrow h_1 := au_1^2 + cu_2^2 + du_1 + eu_2 + f = 0,$$

$$V \in \kappa \Leftrightarrow h_2 := av_1^2 + cv_2^2 + dv_1 + ev_2 + f = 0,$$

$$OV \perp OU \Leftrightarrow h_3 := (u_1 - r)(v_1 - r) + (u_2 - s)(v_2 - s) = 0,$$

$$OP \perp UV \Leftrightarrow h_4 := (p - r)(u_1 - v_1) + (q - s)(u_2 - v_2) = 0,$$

$$P \in UV \Leftrightarrow h_5 := pu_2 + u_1v_2 + qv_1 - u_2v_1 - pv_2 - qu_1 = 0.$$

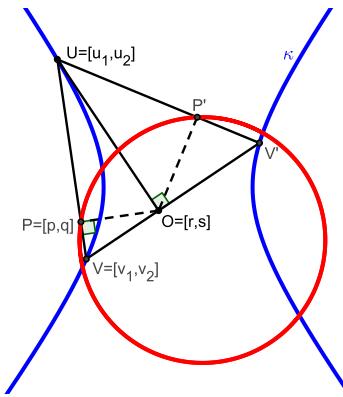


Figure 3: Determine the locus of P when U moves along the conic

Elimination of u_1, u_2, v_1, v_2 in the system $h_1 = 0, h_2 = 0, \dots, h_5 = 0$ yields zero

```
Use R::=Q[a,b,c,d,e,f,p,q,r,s,u[1..2],v[1..2]];
I:=Ideal(h1,h2,h3,h4,h5);
Elim(u[1]..v[2],I);
Ideal(0);
```

elimination ideal, see [1]. To finish elimination, let us suppose that $U \neq O$,

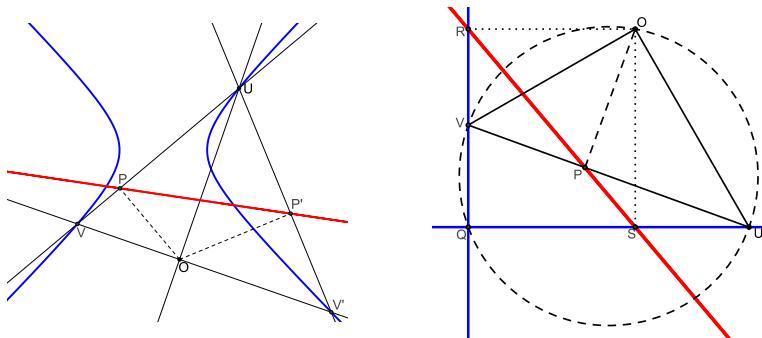


Figure 4: For equilateral hyperbola or two orthogonal lines the locus is a line

i.e. $((u_1 - r)^2 + (u_2 - s)^2)t - 1 = 0$, where t is a slack variable. Adding this condition to the ideal I and eliminating variables u_1, u_2, v_1, v_2, t , one

obtains

$$(a + c)(p^2 + q^2) + (d - 2cr)p + (e - 2as)q + cr^2 + as^2 + f = 0 . \quad (2)$$

In (2) we distinguish two cases:

- a) If $a + c \neq 0$ then (2) is a circle.
- b) If $c = -a$, i.e. if κ is an equilateral hyperbola or two orthogonal lines, the locus equation (2)

$$p(d - 2cr) + q(e - 2as) + cr^2 + as^2 + f = 0,$$

represents a line, Fig. 4.

Remark: The case with two orthogonal lines can also be proved straightforwardly. Applying the Simson–Wallace theorem on the triangle QUV and O on its circumcircle, the points P, S, R are collinear (the Simson line), Fig. 4 right.

3 Connection to the Frégier's theorem

About in 1815 M. Frégier published the following theorem [2], [3]:

Given a conic κ and a point O on κ , then the hypotenuses of right-angled triangles inscribed to κ and having common right-angle vertex O intersect at one point F , the Frégier point to O with respect to κ .

We will prove it using the Theorem 1 when the point O lies on the conic, Fig. 5. The hypotenuse UV of the right triangle UOV intersects the locus circle c at the points P and F .

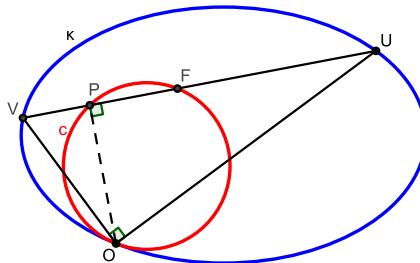


Figure 5: The point F is fixed for all positions of U

To show that the point F is fixed for all positions of U , realize that P lies on the circle c and hence the segment OF must be its diameter. Since O and c are fixed the Frégier theorem follows.

4 Generalization for two lines

In the case of two lines we can generalize the previous Theorem 1 regarding decomposition of the conic into two mutually orthogonal lines:

Theorem 2: *Given two lines p, q forming the angle α , and containing point U on p and an arbitrary point O . Let $V \in q$ be such a point that the lines OV and OU form the angle β . For U moving along the conic the locus of the foot P of the perpendicular from O to the line UV is:*

- a) a circle if $\alpha + \beta \neq 180^\circ$,
- b) a line if $\alpha + \beta = 180^\circ$.

Proof. First suppose that $\alpha + \beta = 180^\circ$, see Fig. 6.

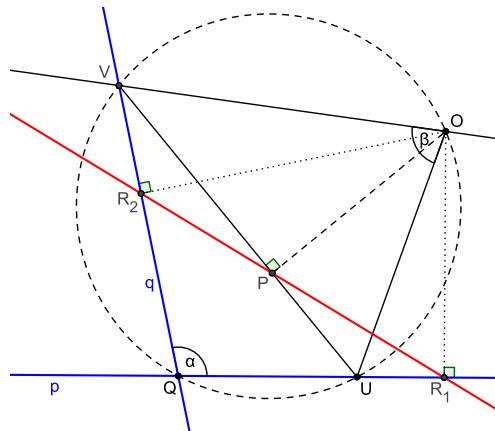


Figure 6: If $\alpha + \beta = 180^\circ$ we get a line

This case can be proved straightforwardly. Realize that the quadrilateral $UOVQ$ is cyclic. Then P lies on the Simson–Wallace line R_1R_2 related to the triangle VQU .

Now suppose $\alpha + \beta \neq 180^\circ$, see Fig. 7.

We will show that the angle R_2PR_1 is constant and equal to $\alpha + \beta$. Realize that the points R_1, R_2 are fixed, depending only on p, q and O . We see that $\angle R_2PV = \angle R_2OV = \delta$, since the quadrilateral POR_2V is cyclic.

Similarly,

$$\angle R_1PU = \angle R_1OU = \varepsilon.$$

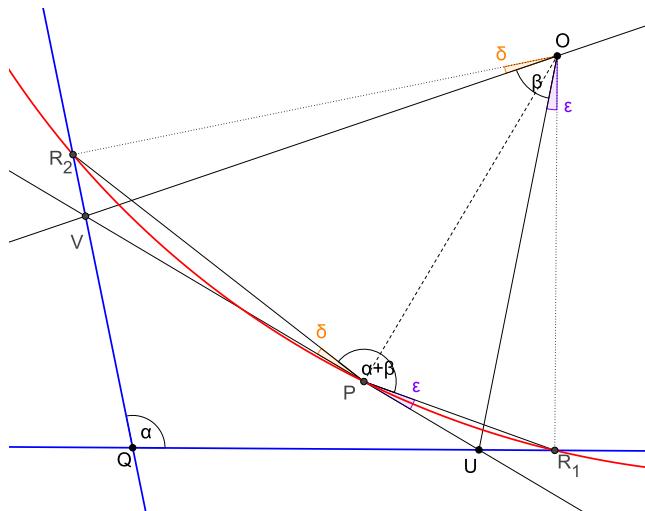


Figure 7: For $\alpha + \beta \neq 180^\circ$, the locus of P is a circle

As OR_1QR_2 is a cyclic quadrilateral, one obtains

$$\delta + \beta + \varepsilon + \alpha = 180^\circ.$$

Then

$$\angle R_1PR_2 = 180^\circ - \delta - \varepsilon = \alpha + \beta$$

which is constant and therefore P lies on the circle.

5 Conclusion

In the text the locus which is related to chords of conics is described. The locus is a circle or in particular cases a line. In the future the author would like to study a 3 dimensional generalisation of this problem.

References

- [1] P. Pech: Problems by searching for loci. In: *Proceeding of Czech - Slovak Conference on Geometry and Graphics 2020*, Czech Society for Geometry and Graphics, Pardubice, 2020, 139-146
- [2] G. Weiss: Frégier points revisited. *South Bohemia Mathematical Letters* 26 (2018), 84-92
- [3] D. Wells: *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry*. Penguin Science (1992)

Geometria v profile absolventa stavebného odboru do roku 2030

Geometry in the Profile of Construction Study Program Graduate up to 2030

Tatiana Rückschlossová, Margita Vajsálová

*Department of mathematics and descriptive geometry, Faculty of Civil Engineering,
Slovak University of Technology in Bratislava
Radlinského 11, 810 05 Bratislava, Slovak Republic
tatiana.ruckschlossova@stuba.sk, margita.vajsablova@stuba.sk*

Abstract. Study programs at the Faculty of Civil Engineering, the Faculty of Architecture and Design and at the Institute of Management STU in Bratislava are still open to geometric subjects after accreditation in 2021. The civil engineer, architect or surveyor of the future has great software and technological possibilities in the creation and realization of a building object, while the geometric and spatial imagination enhances their effective use. The content, methods and forms of teaching geometry require updating related to the subsequent application of student knowledge in professional subjects and in construction practice. In this paper we will show these aspects on the applications of geometry in the teaching of geometric subjects for specific fields of study. At the same time, we will present an analysis, experience and demonstrations of methods used during distance form of teaching descriptive geometry.

Keywords: applications of geometry, accreditation, study program, geometric subjects, distance learning

Kľúčové slová: aplikácie geometrie, akreditácia, študijný program, geometrické predmety, dištančná výučba

1 Časový dosah akreditácie z hľadiska geometrických predmetov v pôsobnosti KMDG na SvF v Bratislave

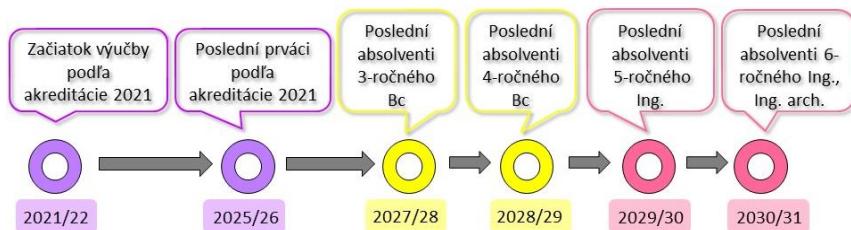
Oddelenie deskriptívnej geometrie na Katedre matematiky a deskriptívnej geometrie Stavebnej fakulty Slovenskej technickej univerzity (STU) v Bratislave pôsobí na nasledujúcich študijných programoch rozdelených podľa inštitúcií:

- Stavebná fakulta STU:

- Pozemné stavby a architektúra
- Civil Engineering
- Technológie a manažérstvo stavieb
- Inžinierske konštrukcie a dopravné stavby
- Vodné stavby a vodné hospodárstvo
- Krajinárstvo a krajinné plánovanie
- Geodézia a kartografia

- Matematicko-počítačové modelovanie
- Fakulta architektúry a dizajnu STU:
 - Architektúra a urbanizmus
- Ústav manažmentu STU:
 - Priestorové plánovanie

V roku 2021 prebehla akreditácia všetkých študijných programov, ktorej časový dosah na vyjadruje schéma na Obr. 1. Napriek tomu, že vyučovanie podľa tejto akreditácie bude prebiehať 5 akademických rokov (od 2021/22 do 2025/26), vplyv na geometrické zručnosti, znalosť geometrických objektov a priestorovú predstavivosť absolventov uvedených študijných programov je pre 6-ročné inžinierske odbory v rozsahu až 11 akademických rokov (do 2030/31). Z toho vyplýva, že tvorba študijných programov, skladby predmetov a ich obsahu je potrebné robiť s víziou do budúcnosti. Preto je potrebné položiť si otázky, aké dôsledky bude mať zrušenie, redukovanie, či ponechanie predmetu. V dobe rýchleho vývoja technológií je dôležité myslieť na inovácie, na zmenu podmienok na školách, zmenu myslenia a pod.



Obr. 1: Časový dosah akreditácie študijných programov STU v roku 2021

2 Špecifika geometrie pre rôzne študijné programy

Vo vyučovaní geometrických predmetov dlhodobo preferujeme aplikácie geometrie v inžinierskej praxi, čomu prispôsobujeme obsah, aj formu. Na jednotlivých študijných programoch vymenovaných v úvode je rôzny rozsah geometrie, no pri tvorbe obsahu predmetu vychádzame z potreby geometrického myslenia v odborných predmetoch.

Na študijnom programe Pozemné stavby a architektúra (4 roky bakalársky + 2 roky inžiniersky stupeň) je povinný predmet Deskriptívna geometria v týždenmom rozsahu 2 hodiny prednášky a 2 hodiny cvičenia a končí skúškou, a tiež povinný predmet Základy počítačovej podpory projektovania v týždenmom rozsahu 1 hodina špeciálneho seminárneho cvičenia a 2 hodiny cvičenia, ktorý končí klasifikovaným zápočtom. V predmete Deskriptívna geometria sa študenti zoznámia so zobrazovacími metódami, geometrickými krivkami a plochami aplikovanými v pozemnom staveľstve. Cieľom predmetu Základy počítačovej podpory projektovania je tvorba stavebného výkresu nástrojmi AutoCADu. Vedomosti a zručnosti získané v týchto predmetoch sú potrebné takmer vo všetkých predmetoch, na bakalárskom stupni štúdia, ako napr. Konštrukcie v

architektúre 1-4, Ateliérová tvorba, Navrhovanie a realizácia geotechnických stavieb, Navrhovanie a realizácia vodných stavieb, na inžinierskom stupni sú to napr. Konštrukcie v architektúre 5. Podobná situácia je aj na študijnom programe Civil Engineering.

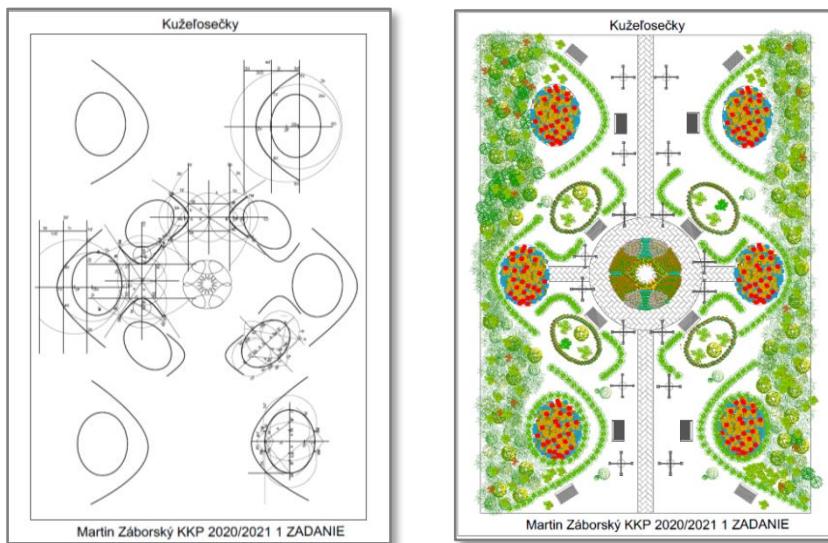
Študijný program Technológie a manažérstvo stavieb (3 roky bakalársky + 2 roky inžiniersky stupeň) má tiež povinný predmet Deskriptívna geometria v týždennom rozsahu 2 hodiny prednášky a 2 hodiny cvičenia, ktorý končí skúškou. Geometrické vedomosti sú potrebné vo viacerých predmetoch na bakalárskom stupni štúdia, ako napr. Konštrukcie v architektúre 1-3, Ateliérová tvorba 1-4, Architektonické navrhovanie budov 1-3, Ateliérová tvorba (urbanizmus), Urbanizmus a územné plánovanie, Súčasné trendy a inovácie v konštrukciách a architektúre, Vizualizácie a virtuálna realita, BIM a na inžinierskom stupni sú to napr. Architektonicko-konštrukčný ateliér 1-3, Počítačová grafika a vizualizácie 1-2.

Na študijnom programe Inžinierske konštrukcie a dopravné stavby (3 roky bakalársky + 2 roky inžiniersky stupeň) je povinný predmet Deskriptívna geometria v týždennom rozsahu 2 hodiny prednášky a 2 hodiny cvičenia, ktorý končí skúškou. Geometrické vedomosti študenti aplikujú v odborných predmetoch zameraných na dopravné stavby, ako cesty, mosty a pod., ako sú Stavebné konštrukcie 1-2, Počítačové modelovanie konštrukcií, Cesty a diaľnice, Drevené prvky a konštrukcie, Stavba pozemných komunikácií.

Študijný program Vodné stavby a vodné hospodárstvo (3 roky bakalársky + 2 roky inžiniersky stupeň) má povinný predmet Deskriptívna geometria v týždennom rozsahu 2 hodiny prednášky a 2 hodiny cvičenia, ktorý končí skúškou. Geometrické vedomosti študenti aplikujú v odborných predmetoch zameraných na vodné stavby, na bakalárskom stupni ako napr. Stavebné konštrukcie 1-2, Dopravné stavby, Stavby vodného hospodárstva a krajiny, Ateliérová tvorba – vodné hospodárstvo krajiny, Kovové a drevené konštrukcie a na inžinierskom stupni napr. CAD systémy vo vodnom hospodárstve, Geografické informačné systémy (GIS) vo vodnom hospodárstve.

Na študijnom programe Krajínarstvo a krajinné plánovanie (3 roky bakalársky + 2 roky inžiniersky stupeň) je tiež povinný predmet Deskriptívna geometria v týždennom rozsahu 2 hodiny prednášky a 2 hodiny cvičenia, ktorý končí skúškou. Geometrické vedomosti a myšlenie je potrebné v odborných predmetoch zameraných na urbanizmus, navrhovanie a plánovanie krajinných prvkov. Na bakalárskom stupni sú to predmety ako Urbanizmus 1, Ateliér krajinného plánovania 1-3, CAD systémy v krajinnom plánovaní, Stavby vodného hospodárstva a krajiny, Kovové a drevené konštrukcie a na inžinierskom stupni Počítačová podpora projektovania v hydrotechnike.

Na Obr. 2 je ukážka grafickej práce z Deskriptívnej geometrie študenta 1. ročníka Krajínarstva a krajinného plánovania, ktorého téma bola aplikácia kužeľosečiek v navrhovaní pôdorysu parku.

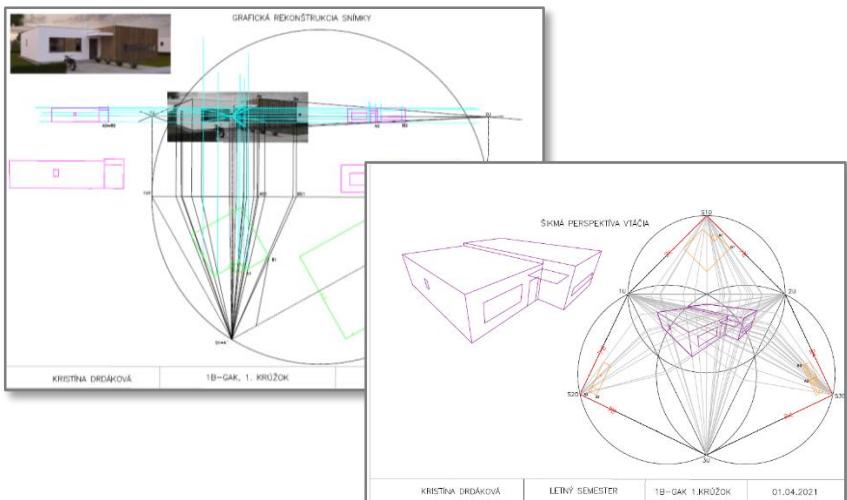


Obr. 2: Ukážka zadania z Deskriptívnej geometrie študenta Martina Záborského na tému „Aplikácia kužeľosečiek v parku“

Na Stavebnej fakulte STU má študijný program Geodézia a kartografia (3 roky bakalársky + 2 roky inžiniersky stupeň) väčší rozsah geometrických predmetov ako už uvedené študijné programy. Študenti Geodézie a kartografie majú povinný predmet Deskriptívna geometria v týždennom rozsahu 2 hodiny prednášky a 2 hodiny cvičenia a povinný predmet Metódy zobrazovania, kde sú za týždeň 2 hodiny prednášok a 1 hodina cvičenia, obidva predmety končia skúškou. Získané geometrické vedomosti študenti aplikujú v odborných predmetoch, a to na bakalárskom stupni aj inžinierskom stupni, ako sú Interaktívne grafické systémy, Priestorové modelovanie v GIS, CAD systémy v geodézii 1-2, Katastrálne mapovanie 1-2, Kartografická tvorba a reprodukcia, Globálna geodézia 1-2, Fotogrametria 1-2, Kozmická geodézia 1-2 a predmet Matematická kartografia, ktorý na inžinierskom stupni štúdia tiež garantuje Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie (KMDG).

V uvedenom predmete Metódy zobrazovania sme zahrnuli aplikácie zobrazovacích metód a geometrického myslenia v geodézii a kartografii. Obsahom predmetu sú geometrické základy fotogrametrie, cylindrická a kónická perspektíva, a tiež geometrické základy kartografie. Na Obr. 3 je ukážka vypracovaného grafického zadania z predmetu Metódy zobrazovania na tému „Lineárna perspektíva a fotogrametria“ študentky 1. ročníka bakalárskeho štúdia. Úlohou študentov je urobiť grafickú rekonštrukciu terestrickej snímky stavebného objektu a zo získanej Mongeovej projekcie objektu zostrojiť jeho lineárnu perspektívu. Na ukážke je rekonštrukcia objektu zo zvislej snímky

a konštrukcia jeho šíkmej perspektívy. V prípade rekonštrukcie objektu zo šíkmej snímky študenti zostrojujú zvislú perspektívnu objektu.



Obr. 3: Ukážka zadania z Metód zobrazenia študentky Kristíny Drdákovej na tému „Lineárna perspektíva a fotogrametria“

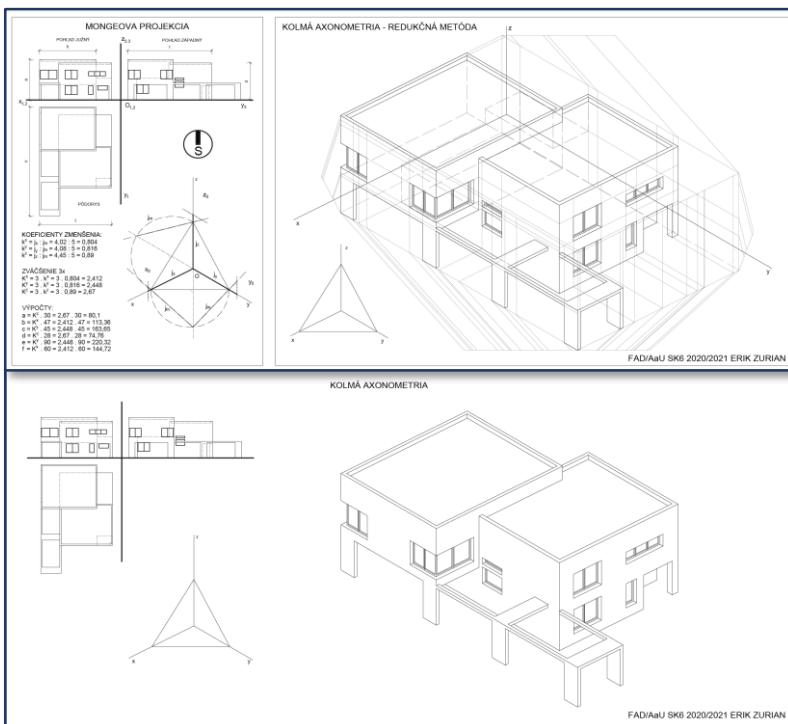
Na Stavebnej fakulte bol v roku 2006 akreditovaný študijný program Matematicko-počítačové modelovanie (3 roky bakalársky + 2 roky inžiniersky stupeň), ktorý zostavila a garantuje Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie. Zameranie na aplikovanú matematiku a informatiku si vyžaduje aj vysokú úroveň geometrických vedomostí, preto je na tomto programe povinných viac geometrických predmetov, a to Geometria v týždenom rozsahu 2 hodiny prednášky a 2 hodiny cvičenia, ktorý končí skúškou, Softvér (AutoCAD) v týždenom rozsahu 1 hodina prednášky a 2 hodiny cvičenia, ktorý končí klasifikovaným zápočtom, tiež Počítačová grafika a Softvér (Vizualizačný) na bakalárskom stupni. Na inžinierskom stupni štúdia je dôležitý geometrický predmet Diferenciálna geometria a geometrické myšlenie je potrebné napr. v predmete Spracovanie obrazu a Matematické modelovanie v geodézii, no tiež pri vypracovávaní bakalárskych a diplomových prác.

Pre všetky študijné programy na Stavebnej fakulte je akreditovaný voliteľný predmet Vybrané kapitoly z deskriptívnej geometrie, ktorého obsahom sú metódy osvetlenia, zrkadlenia, geometrické základy fotogrametrie a aplikácia nerozvinuteľných plôch v stavebnej praxi.

Pôsobenie Oddelenia deskriptívnej geometrie KMDG je tiež na Ústavе manažmentu STU v Bratislave, a to na študijnom predmete Priestorové plánovanie vo vyučovaní predmetu Geometria v týždenom rozsahu 2 hodiny prednášky a 2 hodiny cvičenia končiaceho skúškou. Získané geometrické

vedomosti, zručnosti a myslenie študenti aplikujú v odborných predmetoch, ako: Zobrazovacie metódy v priestorovom plánovaní, Priestorové plánovanie, Územné plánovanie, Projekt priestorového plánovania I-V, Krajinné plánovanie, Ateliér navrhovania I-VIII, Modelovanie, Krajinná a parková architektúra, Územné plánovanie, Ateliérový seminár I-IV.

Na Fakulte architektúry a dizajnu STU v Bratislave boli v akreditácii 2021 urobené viaceré zmeny. Na študijnom programe Dizajn bol zrušený predmet Deskriptívna geometria a na študijnom programe Architektúra a urbanizmus sa predmet Matematika zmenil na výberový.

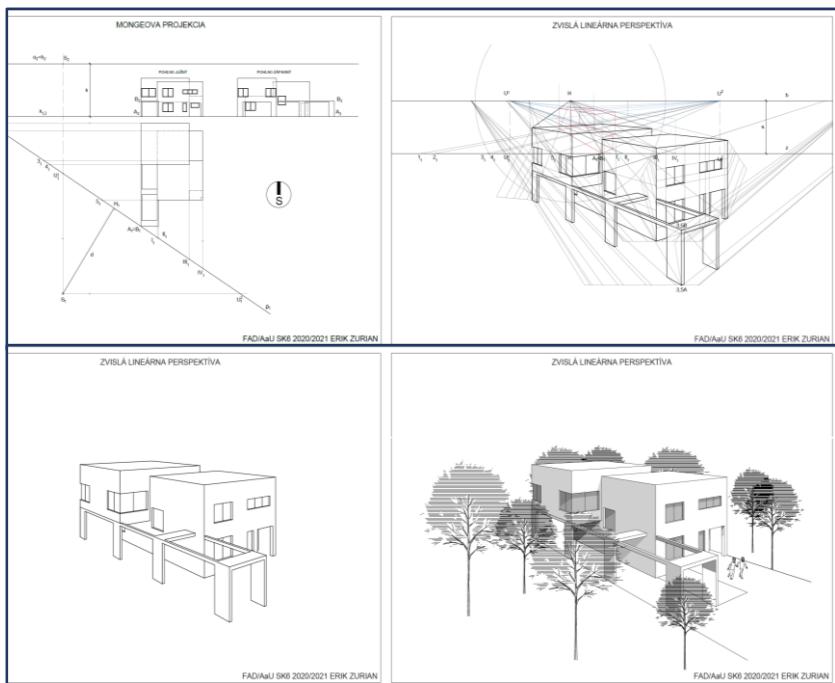


Obr. 4: Ukážka zadania z Deskriptívnej geometrie I študenta Erika Zuriana na tému „Zobrazenie domu v Mongeovej projekcii a kolmej axonometrii“

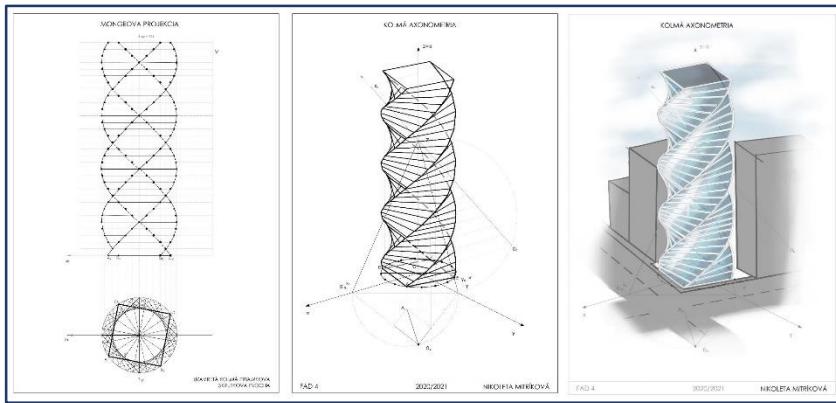
Geometria na študijnom programe Architektúra a urbanizmus (4 roky bakalársky + 2 roky inžiniersky stupeň) má stále silné zastúpenie, a to v dvoch akreditovaných povinných predmetoch: Deskriptívna geometria I a matematické myslenie a Deskriptívna geometria II. Obidva predmety majú týždenný rozsah 2 hodiny prednášky a 1 hodinu cvičenia a končia sa skúškou. Geometrické myslenie je potrebné v každom odbornom predmete budúcich architektov a urbanistov, napr. Výtvarná tvorba I-IV, Architektonické kreslenie, Základy

architektonického navrhovania, Staviteľstvo I-V, Urbanizmus I-IV, Ateliér navrhovania I-VIII, Modelovanie, Krajinná a parková architektúra, Územné plánovanie, Ateliérový seminár I-IV.

Pri výučbe deskriptívnej geometrie pre študentov odboru Architektúra a urbanizmus je tiež do veľkej miery uplatňovaný aplikačný prístup. V rámci tohto prístupu študenti vypracovávajú grafické práce, ktoré sú kombináciou viacerých zobrazovacích metód, napr. v zimnom semestri je to zobrazenie rodinného domu v Mongeovej projekcii a kolmej axonometrii (Obr. 4). V letnom semestri nadvádzajú zobrazením domu v lineárnej perspektíve (Obr. 5) a aplikáciou rotačnej alebo skrutkovej plochy pri zobrazení stavebného objektu (Obr. 6). Cieľom takýchto komplexných zadanií je upevniť prepojenie deskriptívnej geometrie a odborných predmetov ako Základy navrhovania či Ateliér navrhovania, kde študenti vo výslednej semestrálnej práci predkladajú svoj vlastný návrh rodinného domu prezentovaný bohatou obrazovou dokumentáciou práve s aplikáciou spomenutých zobrazovacích metód.



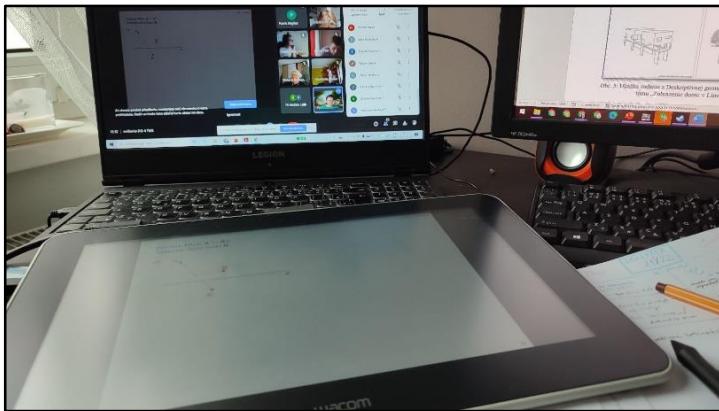
Obr. 5: Ukázka zadania z Deskriptívnej geometrie II študenta Erika Zuriana na tému „Zobrazenie domu v Lineárnej perspektíve“



Obr. 6: Ukážka zadania z Deskriptívnej geometrie II študentky Nikolety Mitríkovej na tému „Applikácia skrutkovej plochy“

3 Skúsenosti s realizáciou dištančnej formy výučby geometrických predmetov

Zmena výučby z prezenčnej formy na dištančnú sa udiala veľmi náhle a zastihla učiteľov viac či menej pripravených. Veľkou výhodou bolo že učitelia z nášho pracoviska už mali zaužívanú formu prednášok a cvičení pomocou PowerPoint prezentácií, ktoré umožňujú postupné krokovanie a sú efektívne použiteľné pri video-konferenčnej výučbe v prostredí Google Meet a MS Teams. Tieto materiály sú tiež prístupné študentom na dokumentovom serveri akademického informačného systému. Taktiež sme mohli študentom ku konkrétnym témam odporučiť aj elektronické študijné materiály, dostupné online, doplnené vizualizáciami pomocou AutoCADu [1], [2], [3], [4], [5].

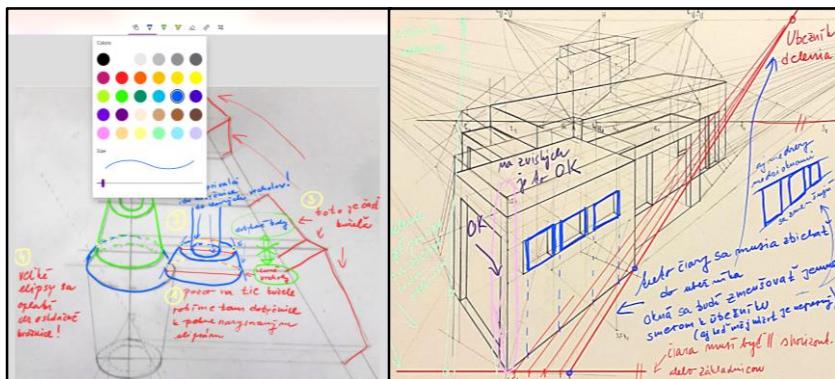


Obr. 7: Využitie grafického tabletu

Samotná komunikácia so študentmi prebiehala v online prostredí Google Classroom, kde im boli zdieľané dôležité informácie, inštrukcie k zadaniám či nahrávky prednášok. Tu tiež študenti nahrávali a konzultovali svoje grafické práce a testy, ktoré sa dali efektívne zobrazovať a organizovať.

Pri samotnej realizácii výučby sa veľmi osvedčilo používanie grafického tabletu typu Pen&Display. Na prednáškach a cvičeniacich mal učiteľ možnosť interaktívne podľa potreby dokresľovať doplňujúce informácie či pomocné konštrukcie priamo do snímok prezentácie (Obr.7) alebo v grafickom prostredí ako OneNote či Jamboard.

Ďalšia výhoda sa ukázala pri kontrolovaní a konzultovaní grafických zadania v súčinnosti napr. s Windows aplikáciou Snip&Sketch, kde na obrazovke grafického tabletu bolo možné priamo rukou, alebo aj pomocou virtuálneho pravítka, dopisovať a dokresľovať študentom doporučené úpravy (Obr.8). Obrázok s vysvetlením a grafickými poznámkami bol pre študentov určitej názornejší ako len textový popis stavu zadania.



Obr. 8: Ukážka opravy grafickej práce v prostredí Snip&Sketch

4 Záver

Úpravu skladby a obsahu predmetov vykonanú v akreditácii študijných programov STU uvedených v článku a dištančné výučbu v súčasnej situácii pokladáme za výzvu, ktorá posúva výučbu geometrie k efektívному využitiu dostupných technologických prostriedkov. Zároveň sa potvrdil správny trend vypracovania a využívania interaktívnych študijných materiálov na našom pracovisku, ktorých autorkami sú členky Oddelenia deskriptívnej geometrie KMDG. Uvedomenie si viac ako desaťročného časového dosahu zmien študijných programov v akreditácii na absolventa je dôležitý z hľadiska zachovania trendu vyučovania aplikácií a využívania moderných technológií vo výučbe geometrie, a to s rešpektom ku zmenám v myslení študentov.

Pod'akovanie

Tento článok vznikol za podpory grantu KEGA 008STU-4/2020.

Literatúra

- [1] K. Mészárosová, T. Rückschlossová, Z. Tereňová: *Deskriptívna geometria II. Prvá časť – Rotačné a skruškové plochy*, Vydavateľstvo STU v Bratislave, 2014, ISBN 978-80-227-4275-7. Dostupné na internete: <http://www.math.sk/skriptaDG2/1>
- [2] K. Mészárosová, T. Rückschlossová, Z. Tereňová: *Deskriptívna geometria II. Druhá časť – Priamkové, translacné, klinové a kanálové plochy*, STU v Bratislave, 2018, ISBN 978-80-227-4767-7. Dostupné na internete: <http://www.math.sk/skriptaDG2/2>
- [3] K. Mészárosová, Z. Tereňová: *Deskriptívna geometria I. Stredové premietanie a lineárna perspektíva*, STU v Bratislave, 2019, ISBN 978-80-227-4929-9. Dostupné na internete:
<http://www.vydavatelstvo.stuba.sk/online-knihy/deskriptivna-geometria-1>
- [4] M. Vajsáblová: *Deskriptívna geometria pre GaK*, Vydavateľstvo STU v Bratislave, 2009. 97 s., ISBN 978-80-227-3053-2. Dostupné na internete: <http://www.svf.stuba.sk/docs//dokumenty/skripta/deskriptivna_gak/index.html>.
- [5] M. Vajsáblová: *Metódy zobrazovania pre GaK*, Vydavateľstvo STU v Bratislave, 2011, ISBN 978-80-227-3574-2. Dostupné na internete: http://www.svf.stuba.sk/docs//dokumenty/skripta/metody_zobrazovania/index.html

GeoGebra Tools for Drawing in Double Orthogonal Projection and 4D Perspective

Jakub Řada

*Charles University, Faculty of Mathematics and Physics, Mathematical Institute of Charles University
Sokolovská 83, 186 75, Prague 8, Czech Republic
rada@karlin.mff.cuni.cz*

Abstract. With the advent of modern technology, it is often much more accessible to draw on a computer than on paper. It is necessary to choose the right program. There are efforts to make special software for a specific projection, but usually, these programs do not last long. For example, In 1999, Petr Plavjaník's program - Deskriftivní geometrie celebrated success in SPA and INVEX '99. After a few years, its development was stopped. For this reason, it is better and more convenient for the users to use some general graphics software. GeoGebra is one of them, and it also has an outstanding possibility to create your own custom tools. Each projection has its principles for which custom tools can be created. This article aims to show using GeoGebra with own custom tools as additional software to display objects in double orthogonal projection and 4D perspective.

Keywords: Custom tools, GeoGebra, Graphics software

1 Introduction

Every author writing any text on synthetic geometry has experienced a situation when it was necessary to insert some drawn pictures into the written text. In the old days, pictures were drawn by hand and then inserted into a book. Nowadays, the figures are drawn on the computer and there are a few questions about it. What software to choose for solving the problem and in which software it will be done with the least effort. The images can theoretically be painted in Microsoft Paint [6], but without facilitation tools it will be tough work. A better option is to use special software specifically designed for the projection. A Sketch 360 described in [13] is a program for Drawing Equirectangular Spherical Perspectives unfortunately the program is quite narrowly focused. For Monge's projection, it is possible to use a program by Petr Plavjaník Deskriftivní geometrie [1]. This program won the first place in the national round of the Czech Republic Student's Professional Activities (SPA) in the field of mathematics and mathematical informatics. It was also exhibited at INVEX '99 in the Creative Hall. Several hundred licenses of the program were sold, it was used by 20 high schools and 6 universities in the Czech Republic and at three universities in the USA, Brazil, and Egypt [1]. After 2006, no new version of the program was released [2]. Any user has the choice to choose a special software (like the one mentioned above) and learn how to use it, or use a universal graphical software such as Geogebra

[3]. In addition, GeoGebra offers the possibility to make drawing easier with its own custom tools. Then any projection can be drawn in an easier way (Poincaré disk model [7], Immersive perspective [8], Monge's projection [10]). We are not yet aware of any software for displaying objects in the double orthogonal projection of a 4-space onto two mutually perpendicular 3-space and 4-perspective. For this reason, we choose GeoGebra, where it is possible to draw line by line with basic tools, as when drawing by hand, or it is possible to create your own custom tools and save the work locally.

2 Double orthogonal projection and 4D perspective

Let us briefly introduce the double orthogonal projection of a 4-space onto two mutually perpendicular 3-space (4DDOP). A double orthogonal projection of a 3-space onto two mutually perpendicular planes is known as Monge's projection. 4DDOP method is a natural generalization of Monge's projection in 4D. Let us have a 4-space with reference axes x, y, z , and w . A point $P(p_x, p_y, p_z, p_w)$ in the 4-space is projected orthogonally to its two conjugated images in the 3-spaces $\Xi(x, y, z)$ and $\Omega(x, y, w)$. One of the 3-spaces, say Ξ , is rotated about the plane $\pi(x, y)$ to the second (modeling) 3-space Ω such that z and w have opposite orientations (w upwards, z downwards in this paper). As a result, the point P has two conjugated images in the modeling 3-space — the Ξ -image $P_3(p_x, p_y, p_z)$ and Ω -image $P_4(p_x, p_y, p_w)$. The conjugated images P_3 and P_4 lie on their common ordinal line perpendicular to the plane $\pi(x, y)$ in the modeling 3-space. 4DDOP is thus described in [12], in detail in [11].

The aim of the 4-perspective is to display a visual image of an object given for example by the combined orthogonal projections so that it is similar to the image of the object perceived by the eye. 4-perspective is the generalization of the linear perspective in a four-dimensional setting. The 4-perspective is a central projection, in which each point is projected from a fixed centre (viewpoint or camera) into a picture space. The resulting intersection of the projecting ray and the picture space is called the perspective image of the point.

3 Custom GeoGebra tools

To construct some objects in 4-perspective, there is a need to find the object in 4DDOP and then project the object into a 4-perspective using the associated 4DDOP. Similar to how an object from a Monge projection is displayed in a linear perspective. Recently, it was necessary to visualize a 3-sphere in 4-perspective (fig. 1) (Step-by-step construction [13]).

To visualize such an object, there is a need to use about 500 steps of construction, or make it easier/faster by using a command line or custom tools. In GeoGebra, it is possible to visualise objects by clicking on tools

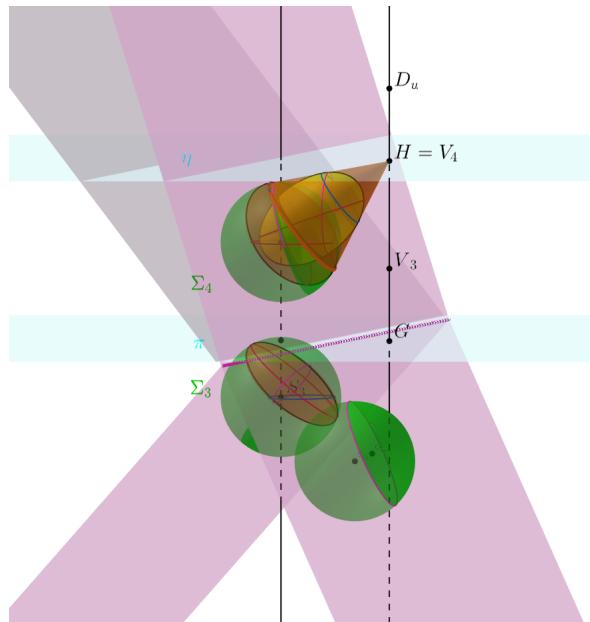


Figure 1: 3-sphere in 4-perspective and 4DDOP

or construct the object via the command line. If there are already many lines in the image (especially in 3D), the user can simply click through. For this reason, it is safer to use the command line for right construction. The user can use simple commands. For example:

Line(< Point >, < Point >)

Circle(< Point >, < RadiusNumber >)

Intersect(< Object >, < Object >)

or multiple command composed from simple commands:

Intersect(Line(< Point >, < Point >), Circle(< Point >, < RadiusNumber >)).

Commands inserted through the command line make work easier, and for frequently repeated commands you often only need to change the variables inside the command:

Intersect(Line(S1, S2), Circle(S, r))

Intersect(Line(O1, O2), Circle(O, r))

Intersect(Line(K1, K2), Circle(K, r)).

If there is a need to use a structure frequently, or in other projects, it is better to create a GeoGebra tool. After drawing the desired construction from which the tool is to be made or downloaded as GeoGebra applet, the user must click on [Tools] => [Create New Tool]. Then select the input and output objects. Thus, the tool will be successfully created and can be used or exported. For export custom tools, there is a need to select them in [Manage Tools] and click on [Save as...]. The tool is then saved as .ggt file and can be opened in any GeoGebra just by dragging the mouse. It is recommended to have a folder in the computer with tools that the user can drag and drop with the mouse into GeoGebra as needed. This way the tools will always be at hand.

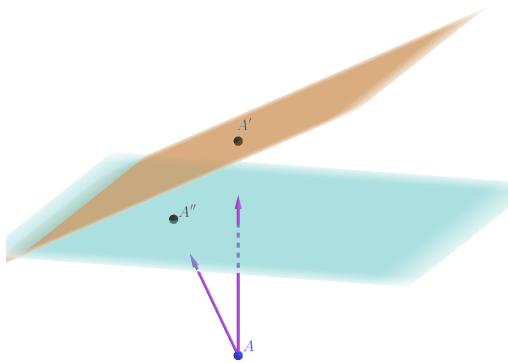


Figure 2: The orthogonal projection of a point perpendicular to the plane into the plane

It is usually a good idea not to skimp on the creation of tools. The wrongly named tool is no longer used by the author himself and if the tool does not have a proper label, it is also no longer used. Consider, construction of a tool that projects a point into a plane perpendicular to another plane (fig 2). If the author does not distinguish in the label which plane is which and in what order they are arranged in the tool, the result of the construction is completely different. Point A'' is created instead of point A' (fig 2). And if the whole construction is a bit messy because of many lines, the author will not even notice the wrong solution.

Occasionally it happens that the user needs a tool, for example, the construction of a quadric passing through 9 points. Unfortunately, there is no database of custom GeoGebra tools. On the other hand, there is a database of GeoGebra applets [4] where it is possible to find an applet constructing a quadrilateral passing through 9 points [5]. There is a way to download the applet from the website (top right) and create your own tool from the applet.

In this particular case, the output will be a quadric, and the input will be the required 9 points. On the one hand, sometimes it is worthwhile and convenient to find the appropriate applet on Geogebra portal and create the tool from it. However on the other hand, sometimes it is a problem to find the required applet or the applet is often imperfect or incomprehensibly constructed. It is up to each user whether it is faster and easier for them to use the command line, create their own tools or create them from the GeoGebra applet. This is a question for everyone to answer for themselves. The author of this article combined all three methods as needed.

4 Geogebra tools used for visualize 3-sphere in 4-perspective

To simplify the construction of the 3-sphere in 4-perspective (fig. 1), the author planned to use nine custom tools. This number was reduced to five because the remaining four were entered via commands in the command line. As mentioned above, there is no need to create a unique tool for everything. The individual constructions used can be found in the properties of the objects in GeoGebra applet [13] after download. The most used custom tool in this construction is the orthogonal projection of a point onto a plane in a given direction. Another tool finds the associated orthogonal projection of a point on the 4-sphere. This tool is specifically constructed for solving this problem. The other tools are generally applicable. Another tool is used to display the perspective projection of an object from the associated projection of a point in 4DDOP and the given 4D perspective (H, G, D_u) . The author uses this custom tool in each project, that includes 4-perspective. The last used tool is to display a quadric of 9 points. This tool uses the analytic opportunity of GeoGebra, and the quadric is calculated analytically, after the only computed surface is visualised.

5 Conclusion

The author of this article describes the need to accompany texts on geometry with pictures. The text mentions the possibility to use special software, which often does not even exist, or to use GeoGebra. The author of the article describes the possibility to draw almost anything in GeoGebra. The easiest method is to click all the constructions in there with the mouse. This method is time consuming and the image becomes sometimes labyrinthine and unclear. The second method is to use the command line. The user does not have the possibility to click the wrong way, plus the commands can be grouped together and in case of a repetitive construction there is a possibility just to change the variables. The last option mentioned in the article is to create own GeoGebra tool. The advantages of this approach include the ability to transfer the tool between projects and the ability to create the tool from GeoGebra applets available online. In the end, the author describes the tools that are used to construct the sphere in 4-perspective.

Acknowledgements

Jakub Řada was supported by the grant SVV No. 260580

References

- [1] P. Plavjanik: *Deskriptivní geometrie*, dg.vividici.cz [4.2017]
- [2] "Instaluj": <https://www.instaluj.cz/deskriptivni-geometrie> [8.2021]
- [3] "GeoGebra": www.geogebra.org [8.2021]
- [4] "GeoGebra applets": <https://www.geogebra.org/materials> [8.2.2021]
- [5] M. Blossier: *Quadric through 9 points*
<https://www.geogebra.org/m/xqkwgcan> [accessed 1st July 2021].
- [6] P. Davison: *Because of the pixels: On the history, form, and influence of MS Paint*, Journal of Visual Culture 13.3, pp. 275-297, 2014
- [7] J. Manthey et al.: *Geogebra Tools For The Poincaré Disk*, North American GeoGebra Journal 5.2, 2016
- [8] A. B. Araújo: *A GeoGebra tool for drawing immersive perspectives*, ARTeFACTo2020. International Conference on Digital Creation in Arts and Communication, pp. 155-160, Edições Centro de Investigação em Artes e Comunicação. 2020
- [9] A. B. Araújo: *Eq A Sketch 360, a Serious Toy for Drawing Equirectangular Spherical Perspectives*, Proceedings of the 9th International Conference on Digital and Interactive Arts, Braga Portugal, pp. 1–8, 2019
- [10] V. Ferdiánová et al.: *GeoGebra tools in creating materials for teaching Monge projection*, 13th International Conference on Education and New Learning Technologies, pp. 5669-5678, 2021
- [11] M. Zamboj: *Double Orthogonal Projection of Four-Dimensional Objects onto Two Perpendicular Three-Dimensional Spaces*, Nexus Network Journal, 20, pp. 267–281. 2018
- [12] J. Rada, M. Zamboj: *3-sphere in a 4-perspective* Proceedings of the 8rd International Scientific Conference MoNGeometrija 2021. Novi Sad: Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad, 2021. *Preprint*
- [13] J.Rada: *3-sphere in 4-perspective*: www.geogebra.org/m/xv3evzyh

Billiard Motions in Ellipses – Invariants of Projective Nature

Hellmuth Stacheler

*Institute of Discrete Mathematics and Geometry
Vienna University of Technology
stachel@dmg.tuwien.ac.at*

Abstract. A billiard is the trajectory of a mass point in a domain with ideal physical reflections in the boundary. The sides of billiards in an ellipse e are tangent to a confocal conic called caustic c . If one billiard in e closes after N reflections, then this holds for all billiards in e with caustic c . The variation of these billiards is called billiard motion. In this paper we focus on the diagonals and their envelopes during the motion.

Keywords: ellipse, billiard, caustic, Poncelet grid, billiard motion

1 Introduction

A *billiard* is the trajectory of a mass point in a domain with ideal physical reflections in the boundary. Already for two centuries, billiards in ellipses and their projectively equivalent counterparts have attracted the attention of mathematicians, beginning with J.-V. Poncelet [3] and C.G.J. Jacobi [2]. Recent computer animations, which were carried out by Dan Reznik (Brazil), stimulated a new vivid interest on this well studied objects.

The sides of any billiard in an ellipse e are tangent to a confocal ellipse or hyperbola c called *caustic*. It was Poncelet [3, p. 361] who proved in the projective setting: If one billiard in e with caustic c closes after N reflections, then it closes for each choice of the initial vertex $P_1 \in e$. The variation of P_1 on e defines a so-called *billiard motion*, though this variation neither preserves angles or side lengths nor is a projective motion. However, the total length of the periodic billiard is invariant, and Reznik [4] identified about 80 other invariants, e.g., the sum of cosines of the interior angles.

After recalling a result of Poncelet in Theorem 1, the goal of this paper is to present new invariants of billiard motions concerning the diagonals. We confine ourselves to the cases with an ellipse as caustic (note [6, Theorem 1]), though most of the results hold also for hyperbolas as caustics.

As introduced in [5], for each billiard $P_1P_2\dots$ exists a *conjugate billiard* $P'_1P'_2\dots$ where in a certain sense vertices P_i and the contact points Q_i with the caustic c change their roles (see Figure 1).

The extended sides of a billiard intersect at points which define the associated *Poncelet grid* and are located on confocal ellipses and hyperbolas.

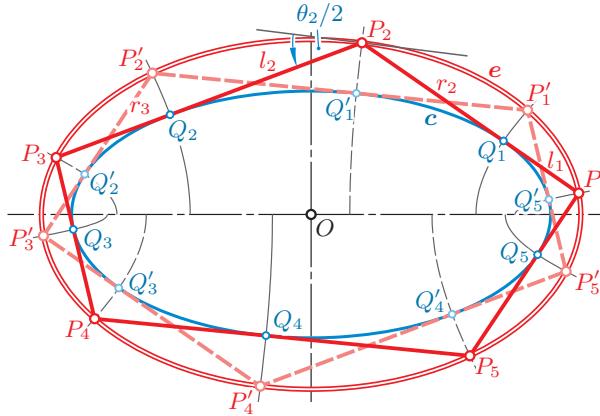


Figure 1: A periodic billiard $P_1P_2\dots P_5$ in e with caustic c along with the conjugate billiard $P'_1P'_2\dots P'_5$.

We follow the notation in [5] and define

$$S_i^{(j)} := \begin{cases} [P_{i-k-1}, P_{i-k}] \cap [P_{i+k}, P_{i+k+1}] & \text{for } j = 2k, \\ [P_{i-k}, P_{i-k+1}] \cap [P_{i+k}, P_{i+k+1}] & \text{for } j = 2k-1 \end{cases} \quad (1)$$

where $i, j = 1, 2, \dots$. Then for fixed j , the points $S_i^{(j)}$ are located on a confocal ellipse $e^{(j)}$, which remains invariant under the billiard motion [5, Theorem 3.6]. The principal semiaxes of $e^{(1)}$ and $e^{(2)}$ are

$$a_{e|1} = \frac{a_c(a_e^2 b_e^2 - d^2 k_e)}{a_e^2 b_e^2 - k_e^2}, \quad a_{e|2} = a_e \frac{(a_e^2 b_e^2 - d^2 k_e)^2 + 4d^2 b_e^2 k_e^2}{(b_e^2 a_e^2 - 3b_e^2 k_e)(a_e^2 b_e^2 - d^2 k_e) - 4d^2 b_e^2 k_e^2}$$

with (a_c, b_c) and (a_e, b_e) as respective semiaxes of the confocal ellipses c and e , and $k_e = a_e^2 - a_c^2$.

For fixed i , the points $S_i^{(1)}, S_i^{(3)}, \dots$ belong to the confocal hyperbola through Q_i , while the points $S_i^{(2)}, S_i^{(4)}, \dots$ are located on the confocal hyperbola through P_i (Figure 2).

2 Diagonals of billiards

Theorem 1. *Let $P_1P_2P_3\dots$ be a billiard in the ellipse e with sides tangent to the confocal ellipse c . Then for fixed $j = 1, 2, \dots$, the envelope of the diagonals P_iP_{i+j+1} is a coaxial ellipse $h_{e|j}$, provided that in the case of N -periodic billiards with even N holds $j \leq [\frac{N-3}{2}]$.*

The ellipse $h_{e|j}$ has the semiaxes

$$a_j = \frac{a_e a_c}{a_{e|j}}, \quad b_j = \frac{b_e b_c}{b_{e|j}},$$

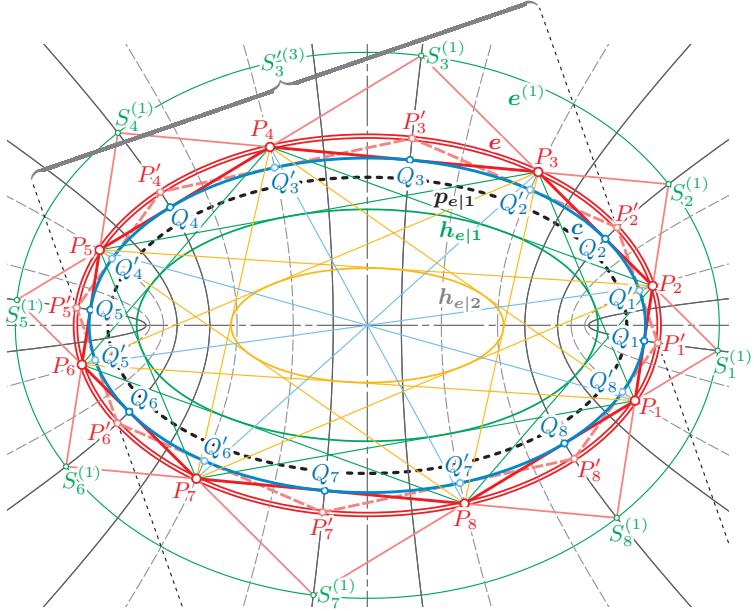


Figure 2: The periodic billiard $P_1P_2 \dots P_8$ inscribed in e with the caustic c along with the envelopes $h_{e|1}, h_{e|2}$ of diagonals. The polarity in the ellipse $p_{e|1}$ (dotted) sends the vertices to first diagonals.

where $(a_{e|j}, b_{e|j})$ are the semiaxes of the ellipse $e^{(j)}$ (Figure 2). The ellipses $h_{e|2}, h_{e|3}, \dots$ belong to the pencil spanned by c and e .

Remark. A projective version of this statement was already proved by Poncelet [3, p. 326]. Jacobi proved in [2, p. 383–385] that in the particular case with circles e and c the envelopes $h_{e|j}$ are circles included in a pencil.

Proof. We focus on the j -th diagonal P_iP_{i+j+1} (with j vertices between P_i and P_{i+j+1}). For the case of N -periodic billiards with even N we assume $0 < j \leq \frac{N-3}{2}$ in order to exclude main diagonals through the center O . The affine transformation

$$\alpha: (x, y) \mapsto \left(\frac{a_c}{a_e} x, \frac{b_c}{b_e} y \right) \quad \text{with} \quad e \mapsto c \quad (2)$$

sends P_iP_{i+j+1} to $Q'_{i-1}Q'_{i+j}$, where Q'_{i-1} and Q'_{i+j} are contact points of the conjugate billiard $P'_1P'_2 \dots$ with the caustic c . The pole of the line $[Q'_{i-1}, Q'_{i+j}]$ w.r.t. c is the point of intersection between $[P'_{i-1}, P'_i]$ and $[P'_{i+j}, P'_{i+j+1}]$. This point belongs to the ellipse $e^{(j)}$ included in the

associated Poncelet grid. According to our notation in (1), we obtain the point $S'_{i+k}^{(j)}$ for $j = 2k$ as well as for $j = 2k + 1$ (Figure 2).

Consequently, the α -images of the diagonals $[P_i, P_{i+j+1}]$ for $i = 1, 2, \dots$ and fixed j are tangent to the polar conic w.r.t. c of the ellipse $e^{(j)}$ with semiaxes $a_{e|j}$ and $b_{e|j}$. This polar image is a coaxial ellipse with semiaxes $a_c^2/a_{e|j}$ and $b_c^2/b_{e|j}$. By α^{-1} it is sent to the ellipse with semiaxes

$$\frac{a_e}{a_c} \frac{a_c^2}{a_{e|j}} = \frac{a_c a_e}{a_{e|j}} \quad \text{and} \quad \frac{b_e}{b_c} \frac{b_c^2}{b_{e|j}} = \frac{b_c b_e}{b_{e|j}}$$

as the envelope $h_{e|j}$ of the diagonals $[P_i, P_{i+j+1}]$. The ansatz

$$\left(\frac{a_{e|j}^2 x^2}{a_c^2 a_e^2} + \frac{b_{e|j}^2 y^2}{b_c^2 b_e^2} - 1 \right) = \lambda \left(\frac{x^2}{a_c^2} + \frac{y^2}{b_c^2} - 1 \right) + \mu \left(\frac{x^2}{a_e^2} + \frac{y^2}{b_e^2} - 1 \right)$$

results with regard to the coefficients of x^2 and y^2 in

$$\lambda = \frac{b_{e|j}^2 a_c^2 - a_{e|j}^2 b_c^2}{a_c^2 b_e^2 - a_e^2 b_c^2} \quad \text{and} \quad \mu = \frac{a_{e|j}^2 b_e^2 - b_{e|j}^2 a_e^2}{a_c^2 b_e^2 - a_e^2 b_c^2}.$$

The substitutions $a_e^2 = a_c^2 + k_e$, $b_e^2 = b_c^2 + k_e$, $a_{e|j}^2 = a_c^2 + k_{e|j}$, and $b_{e|j}^2 = b_c^2 + k_{e|j}$ yield $\lambda = k_{e|j}/k_e$ and $\mu = 1 - \lambda$. \square

Theorem 2. *Let $P_1 P_2 P_3 \dots P_N$ be an N -periodic billiard in the ellipse e with the ellipse c as caustic. Then for even $N = 2k$ the main diagonals $P_i P_{i+k}$ are diameters, and for even k , i.e., $k = 2l$, the pairs of diagonals $[P_i, P_{i+k}]$ and $[P_{i+l}, P_{i+k+l}]$ belong to an involution with a constant product of slopes*

$$s_1 \cdot s_2 = -\frac{b_c b_e^2}{a_c a_e^2}.$$

In the case $k = 2l + 1$ we obtain the same constant product for the pairs $([P_i, P_{i+k}], [P'_{i+l}, P'_{i+k+l}])$ with $P'_1 P'_2 \dots P'_N$ as conjugate billiard.

Proof. The affine transformation α in (2) sends P_i on a diameter with slope s_1 to the contact point Q'_{i-1} of the side $P'_{i-1} P'_i$ with the caustic c (Figure 2). Therefore the diameter OQ'_{i-1} has the slope $s_1 \cdot b_c a_e / a_c b_e$. The direction of $P'_{i-1} P'_i$ is conjugate to OQ'_{i-1} w.r.t. c and has the slope

$$-\frac{b_c^2}{a_c^2} : \frac{s_1 b_c a_e}{a_c b_e} = -\frac{b_c b_e}{a_c a_e s_1}.$$

The side $P'_{i-1} P'_i$ intersects the opposite side $P'_{i-1+k} P'_{i+k}$ at the point $S'_{i+1}^{(k-1)}$ at infinity which belongs to the same branch of the confocal hyperbola through P_{i+l} for $N \equiv 0 \pmod{4}$ and P'_{i+l} for $N \equiv 2 \pmod{4}$.

The relation between P_{i+l} or P'_{i+l} on e and $S_{i+1}^{(k-1)}$ at infinity is the limit of the affine scaling between the ellipse e with elliptic coordinate k_e and a confocal one with $k_e^* \rightarrow \infty$. Therefore, the slope s_2 of OP_{i+l} or OP'_{i+l} equals b_e/a_e times the slope of the diameter through $S_{i+1}^{(k-1)}$, which is conjugate to OQ'_i w.r.t. c . Hence,

$$s_2 = \frac{b_e}{a_e} \cdot \frac{-b_c b_e}{a_c a_e s_1},$$

which results in the stated constant product $s_1 s_2$.¹ \square

For the case $N = 4$, which is characterized by $a_c^2 b_c^2 - k_e^2 = 0$, Theorem 2 yields the constant product $s_1 s_2 = -b_c^2/a_c^2$.

Theorem 3. *Given a billiard $P_1 P_2 \dots$ in the ellipse e and $j \in \{1, 2, \dots\}$, the diagonal line $[P_i, P_{i+j+1}]$ is polar for even j to $P'_{i+(j/2)}$ and for odd j to $P_{i+[(j+1)/2]}$ w.r.t. a coaxial ellipse $p_{e|j}$ with semiaxes*

$$a_e \sqrt{\frac{a_c}{a_{e|j}}} \text{ and } b_e \sqrt{\frac{b_c}{b_{e|j}}}.$$

Proof. The affine transformation α from (2) with $e \mapsto c$ sends the points P_i and P_{i+j+1} respectively to $Q'_{i-1}, Q'_{i+j} \in c$. The tangents to c at the two latter points intersect at a point of $e^{(j)}$ (note Figure 2). For even j it is the point $S'_{i+(j/2)}^{(j)}$ and for odd j the point $S'_{i+[(j-1)/2]}^{(j)}$. The affine scaling $e^{(j)} \mapsto e$ maps these poles to the vertices, as stated. Let (ξ, η) denote the coordinates of these vertices. Then the polar of the point

$$\left(\xi \frac{a_{e|j}}{a_e}, \eta \frac{b_{e|j}}{b_e} \right)$$

w.r.t. c , i.e., the line

$$\frac{\xi a_{e|j}}{a_c^2 a_e} x + \frac{\eta b_{e|j}}{b_c^2 b_e} y = 1$$

is sent by α^{-1} to the diagonal $[P_i, P_{i+j+1}]$. Since this line satisfies

$$\frac{a_c \xi a_{e|j}}{a_c^2 a_e^2} x + \frac{b_c \eta b_{e|j}}{b_c^2 b_e^2} y = 1,$$

it is polar to (ξ, η) w.r.t. the ellipse $p_{e|j}$ with semiaxes as given in the theorem. The polarity in $p_{e|j}$ sends points of e to tangents of $h_{e|j}$. \square

¹Theorem 2 could also be proved similarly to Lemma 8 in [7]. This is caused by the fact that canonical parameters of the initial points of the pair of diagonals differ by a quarter of the period for e .

3 An equivalence

There is a certain converse of Theorem 3. The projective version below is a consequence of one of D. Reznik's experiments.

Theorem 4. *Let $P_1P_2P_3\dots$ be a polygon inscribed in a conic e with $P_i \neq P_{i+1}$ for $i = 1, 2, 3, \dots$. Then the extended sides $[P_i, P_{i+1}]$ are tangent to a conic c if and only if the first diagonals $[P_1, P_3], [P_2, P_4], \dots$ are polar w.r.t. a conic p to the respective vertices P_2, P_3, \dots .*

Sketch of the proof. We use homogeneous coordinates $(x_0 : x_1 : x_2)$ with $e : x_0x_2 - x_1^2 = 0$ and an inhomogeneous parameter t on e such that $P_i = (t_i^2 : t_i : 1)$. P_i and P_{i+1} are conjugate w.r.t. p : $\sum p_{ik}x_ix_k = 0$ iff

$$p_{00}t_i^2t_{i+1}^2 + p_{11}t_it_{i+1} + p_{22} + p_{01}t_it_{i+1}(t_i + t_{i+1}) + p_{02}(t_i^2 + t_{i+1}^2) + p_{12}(t_i + t_{i+1}) = 0.$$

The line $[P_i, P_{i+1}]$ with homogeneous coordinates $(1 : -(t_i + t_{i+1}) : t_it_{i+1})$ is tangent to c with the tangential equation $\sum c_{ik}u_iu_k = 0$ iff

$$c_{00} + c_{11}(t_i + t_{i+1})^2 + c_{22}t_i^2t_{i+1}^2 - 2c_{01}(t_i^2 + t_{i+1}^2) + 2c_{02}t_it_{i+1} - 2c_{12}t_it_{i+1}(t_i + t_{i+1}) = 0.$$

The two conditions are equivalent iff

$$p_{00} = c_{22}, p_{01} = -2c_{12}, p_{11} = 2(c_{11} + c_{02}), p_{02} = c_{11}, p_{12} = -2c_{01}, p_{22} = c_{00},$$

which proves the claim. \square

References

- [1] G. Glaeser, H. Stachel, B. Odehnal: *The Universe of Conics*, Springer Spectrum, Berlin, Heidelberg 2016
- [2] C.G.J. Jacobi: *Ueber die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elementargeometrie*, Crelle's Journal **3/4**, 376–389 (1828)
- [3] J.-V. Poncelet: *Traité des propriétés projectives des figures*, Bachelier, Libraire, Paris 1822
- [4] D. Reznik, R. Garcia, J. Koiller: *Eighty New Invariants of N-Periodics in the Elliptic Billiard*, arXiv:2004.12497v11 [math.DS] (2020)
- [5] H. Stachel: *The Geometry of Billiards in Ellipses and their Poncelet Grids*, J. Geom. <https://doi.org/10.1007/s00022-021-00606-2>
- [6] H. Stachel: *Isometric Billiards in Ellipses and Focal Billiards in Ellipsoids*, J. Geometry Graphics **25/1**, 97–118 (2021)
- [7] H. Stachel: *On the Motion of Billiards in Ellipses*, arXiv:2105.03624 [math.DG] (2021)

Geometric Aspects in Mathematical Foundations of Cartography

Margita Vajsálová

*Department of mathematics and descriptive geometry, Faculty of Civil Engineering,
Slovak University of Technology in Bratislava
Radlinského 11, 810 05 Bratislava, Slovak Republic
margita.vajsablova@stuba.sk*

Abstract. Cartographic projection represents the relationship between the reference surface of the Earth and its map image. In essence, it has a geometric and mathematical character. In this paper, the emphasis is on the presentation of geometric aspects in the selection and creation of cartographic projection, namely the shape of the reference surface of the Earth, geometric characteristics of the projected area, curves on reference surfaces and image shape requirements of projected elements. These aspects are included, although often hidden in the university textbook "Mathematical Foundations of Cartography", in the creation of which I applied my mathematical logic, geometric eyes and cartographic heart.

Key words: cartographic projection, distortion, reference surface of the Earth

1 Introduction

The relationship between the reference surface of the Earth and its map image is named cartographic projection. In essence, it has a geometric and mathematical character. The shape of the reference surface of the Earth, geometric characteristics of the projected area determine choice of the cartographic projection and the distortions of the projected elements. In this paper, the emphasis is on the presentation of geometric aspects in the selection and creation of cartographic projection. These aspects are included, although often hidden in the university textbook "Mathematical Foundations of Cartography" [2], in the creation of which I applied my mathematical logic, geometric eyes and cartographic heart.

2 Reference surfaces of the Earth and coordinates

The reference surface of Earth is the geometric surface that approximates the surface of the Earth's body. In mathematical cartography, a reference sphere and a reference ellipsoid are used, which is an oblate ellipsoid of revolution whose axis is the earth's axis. The choice of the reference surface of the Earth and values of its parameters greatly influences the values of distortions in the cartographic projection. The lengths of the ellipsoid half-axes are a , b and the 1st numerical eccentricity e is:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}. \quad (1)$$

We define geographical coordinates on the Earth reference surface:

- ellipsoidal latitude φ : $\varphi \in \langle -90^\circ, 90^\circ \rangle$, spherical latitude U : $U \in \langle -90^\circ, 90^\circ \rangle$,
- ellipsoidal longitude λ : $\lambda \in \langle -180^\circ, 180^\circ \rangle$, spherical longitude λ : $\lambda \in \langle -180^\circ, 180^\circ \rangle$.
- geocentric latitude β :

$$\operatorname{tg} \beta = (1 - e^2) \operatorname{tg} \varphi, \quad (2)$$

- reduced latitude ψ :

$$\operatorname{tg} \psi = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} \varphi. \quad (3)$$

Using differential geometry they are the principal radii M, N specified at defined point ellipsoid curvature:

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^3}}, \quad N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (4)$$

3 Cartographic projections

Cartographic projection defines mathematical relation between geographic coordinates of corresponding points on two reference surfaces or between geographic coordinates of the point on the reference surface and planar coordinates of its image in the plane. From the point of view of algebraic geometry, it is a relationship between two linear manifolds.

Classification of cartographic representations is realized using 3 criteria.

1st criterion - distortions:

- a, equidistant projections – lengths of a set of curves are preserved
- b, equal-area (equivalent) projections – area values are preserved
- c, conformal projections – angles are preserved
- d, compensational projections – angular and areal distortion are compensated

2nd criterion - projection surface:

a, ellipsoid to the sphere

b, true projections (on the developable surfaces):

- azimuthal projection
- conical projection
- cylindrical projection

c, artificial projections:

- pseudoazimuthal
- pseudoconical
- pseudocylindrical

d, polyconic projection

e, polyhedral projection

f, unclassified projection

3rd criterion - position (cartographic projections on developable surface)

- a, normal projection (polar)
- b, transverse projection (equatorial)
- c, oblique projection

The images of elements of reference surfaces are distorted in cartographic projection, there are scale, angular and areal distortion.

The geometric interpretation of the length distortion at a point is an image of a differential circle with radius ds , which is a *Distortion Ellipse* called the *Tissot's Indicatrix* (Fig.1).

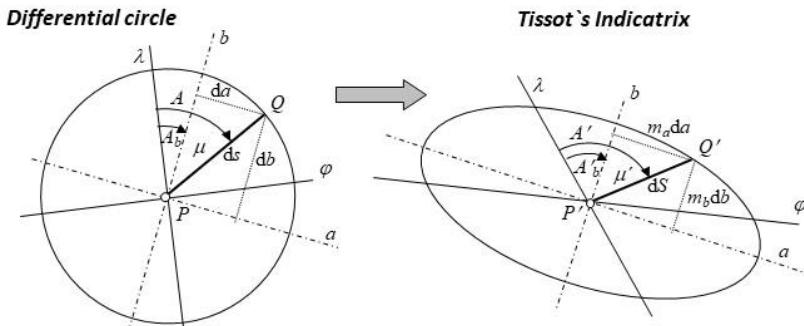


Fig. 1: Distortion Ellipse

Directions of axis a, b with extreme scale distortions, we call ***the principal directions of the mapping***. The image of the distortion ellipses at the intersections of the geographical network in the Mercator-Sanson pseudocylindrical projection is shown in Fig. 2 left [2].

Another way to geometrically represent the length distortion on a map is isometric lines. ***Isometric line*** connects points with constant distortion, for scale distortion mainly in direction of parallels or meridians. In Fig. 2 right are isometric lines with constant distortion in the direction of the meridians in the Mercator-Sanson projection. (Fig. 2 right).

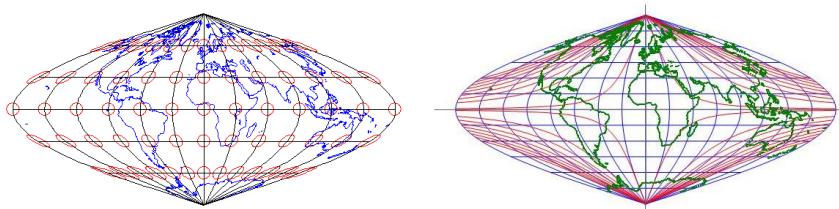


Fig. 2: Distortion ellipses and isometric lines in the Mercator-Sanson projection

4 Some examples of cartographic projections with geometric principle

In history, cartographic projections were created on a geometric basis. Azimuthal perspective projections (orthographic, stereographic, gnomonic) of the reference sphere into the plane were formulated in ancient Greece and were applied to the

construction of maps of the Earth and astronomical map. The Fig. 3 shows the image of the geographical network in orthographic, stereographic and gnomonic projection into the plane in the oblique position. The construction of the image of this geographical network in these projections is based on the methods of descriptive geometry. [4].

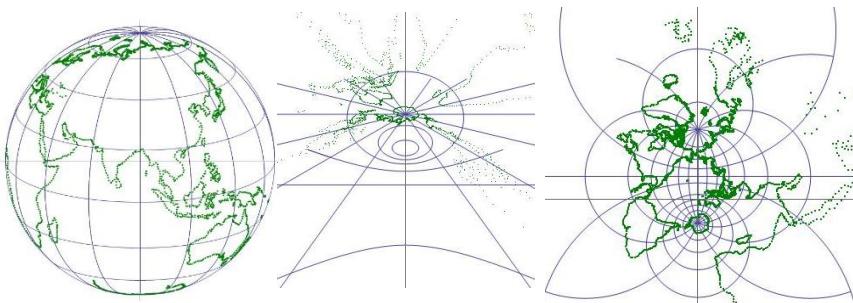


Fig. 3: Geographical network in orthographic (on the left), stereographic (in the middle) and gnomonic (on the right) projection into the plane in the oblique position

Cylindrical perspective projections are also very well known, the names and principles of which are given in the overview in the Fig. 5. Lambert isocylindrical projection (Fig. 4) is the special case of the cylindrical projection, which is equivalent projection and perspective projection on a cylindrical tangent surface from an infinity point parallel to the diameter of the Equator.

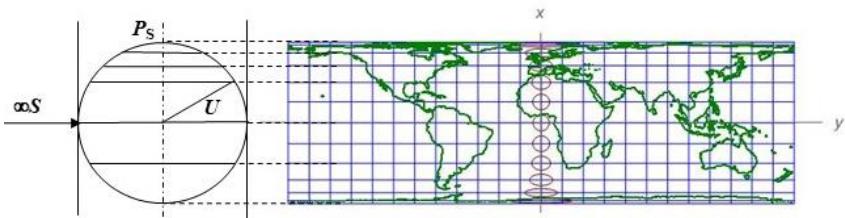


Fig. 4: Geographical network in Lambert isocylindrical equivalent projection

Conical perspective projections have a similar principle as cylindrical projections. The Fig. 6 shows the image of the geographical network and the boundaries of the continents in two conical projections with a moving center lying in the plane of a parallel circle [2].

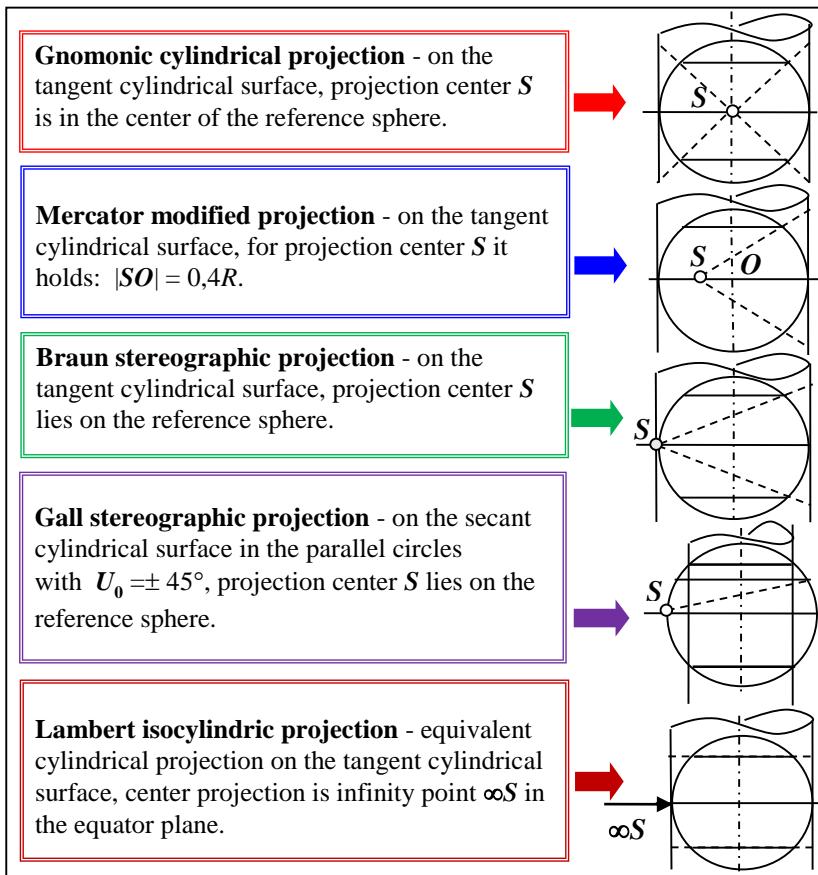


Fig. 5: Overview of the principles of known cylindrical perspective projections

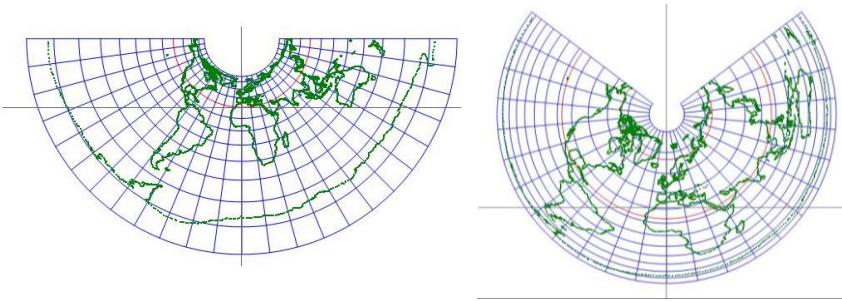


Fig. 6: Conical perspective projections

Several cartographic projections are constructable and the image of the geographical network are interesting geometric curves [4]. Fig. 7 shows

pseudocylindrical projections, in which the geographical parallels are projected as parallel lines and the meridians as different curves, in the figure on the left as broken lines in the equidistance projection and on the right as circular arcs in the Apian projection. Mercator-Sanson pseudocylindrical sinusoidal projection is also one of the constructable projections (Fig. 2).

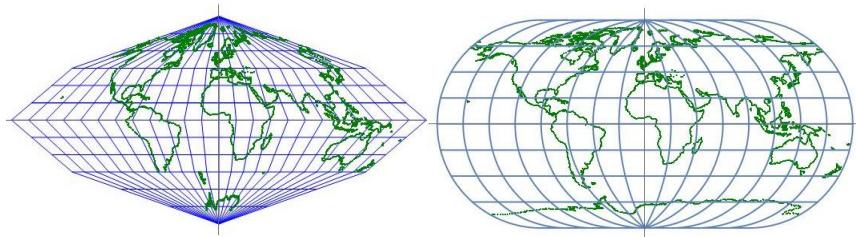


Fig. 7: Equidistant pseudocylindrical projection (on the left) and Apian pseudocylindrical circular projection (on the right)

Examples of constructable projections equidistant on the parallels and also equivalent are shown in Fig. 8, on the left Werner-Stabe pseudoazimuthal projection and on the right Hassler polyconical projection.

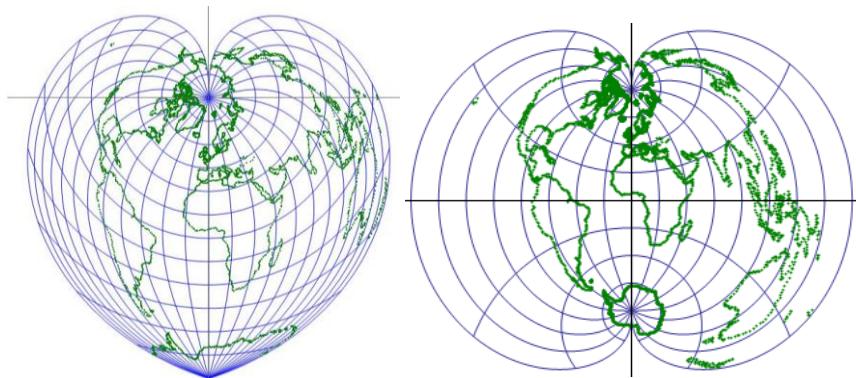


Fig. 8: Werner-Stabe pseudoazimuthal projection (on the left) and Hassler polyconical projection (on the right)

Fig. 9 shows August epicycloidal conformal projection (on the left) and Jervis cycloidal projection (on the right), which are constructable. Article [1] deals with these views in detail.

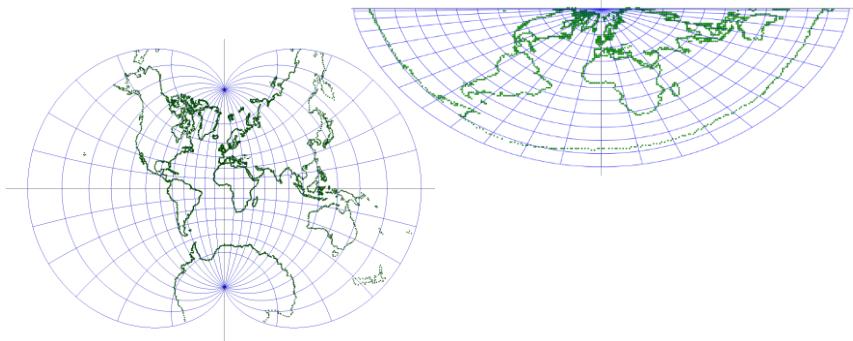


Fig. 9: August epicycloidal conformal projection (on the left) and Jervis cycloidal projection (on the right)

5 Geometric properties of projected area and choice of cartographic projection

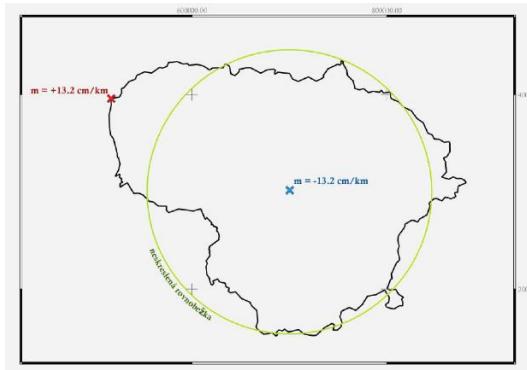
The shape, size and position of the projected area, according to which the type and position of the display area is determined, or their number will be used in the cartographic representation. An overview of the optimal choice of the projection type is given in the Table:

<i>The shape and position of the projected area</i>		<i>Cartographic projection</i>	
Circular area	in the Pole area	Azimuthal	in polar position
	in the Equator region		in transversal position
	in other places		in oblique position
Oblong area	along the Equator	Cylindrical	in polar position
	along the Earth meridian		in transversal position
	along the orthodrome		in oblique position
	along the Earth parallel	Conical	in polar position
	along the cartographic parallel		in oblique position

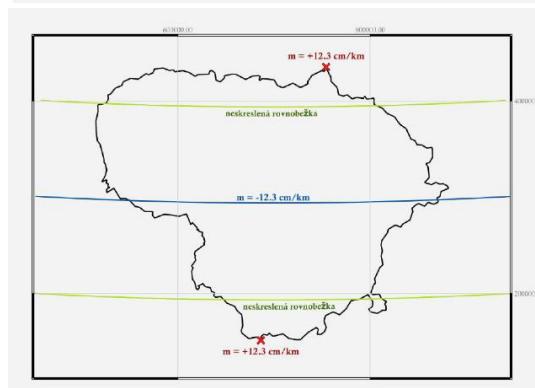
The influence of these criteria on the extreme length distortion is illustrated in the following Fig. 10, where is a comparison of different types of cartographic projections for the territory of Lithuania. The proposals were elaborated within a student group project (Natália Rusnáková, Štefan Ciferský, Marek Golian) in the subject Mathematical Cartography. The aim was to design the cartographic projection and calculation of its parameters in order to achieve a minimum length

distortion in the area. Due to the shape, position and size of the territory of Lithuania, it is appropriate to use the conical conformal projection in the oblique position, in which maximal length distortion is $\pm 11.8 \text{ cm/km}$.

Azimuthal conformal projection in the oblique position, length distortion $\pm 13.2 \text{ cm/km}$



Conical conformal projection in the polar position, length distortion $\pm 12.3 \text{ cm/km}$



Conical conformal projection in the oblique position, length distortion $\pm 11.8 \text{ cm/km}$

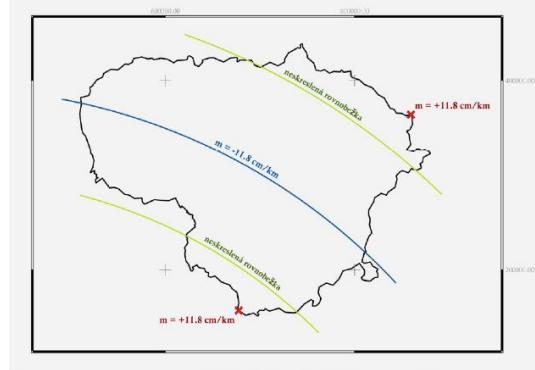


Fig. 10: Proposal of cartographic projection due to the shape, position and size of the territory of Lithuania

6 Geometric properties of projected area and selection of cartographic projection

At present and in the near past, several obligatory Geodetic coordinate systems have been used in Slovakia:

- **S-JTSK (S-JTSK03)**, Bessel ellipsoid, Křovák's conformal conical projection in the oblique position,
- **UTM** (Zones 33N and 34N), ellipsoid WGS84 with parameters of GRS80, projection Universal Transverse Mercator (conformal cylindrical projection in transversal position, on the secant cylindrical surface),
- **S-42 (S-42/83/03)**, Krasovskij's ellipsoid, Gauss-Krüger conformal cylindrical projection in transversal position, on the tangent cylindrical surface,
- **ETRS89 (ETRF2000)**, spatial coordinate system related to the GRS80 ellipsoid.

The transformations between different coordinate systems are based on their geometric factors, namely the geometric parameters of the ellipsoid and the type of cartographic projection. One of the transformations is shown in the diagram in the Fig.11.

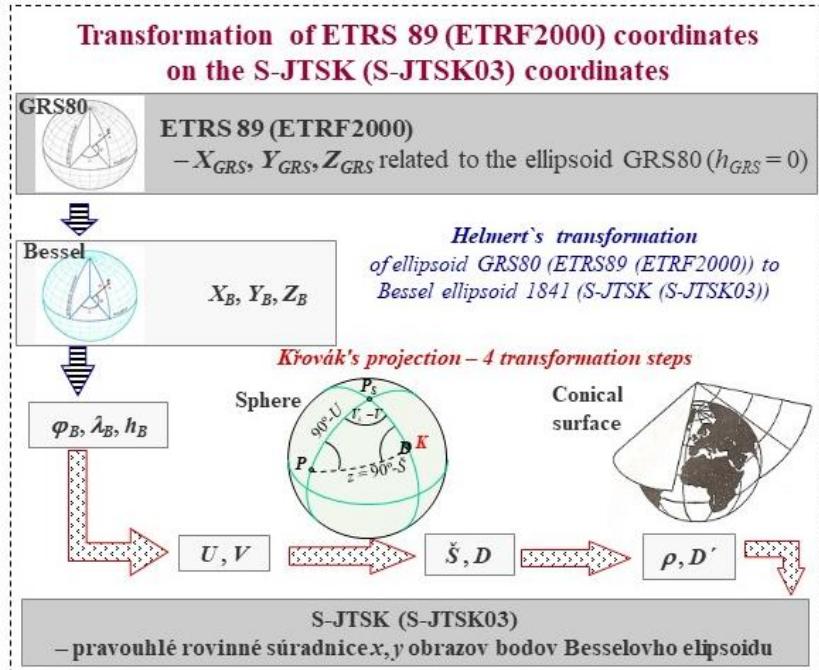


Fig. 11: Principles of the transformation ETRS89 (ETRF2000) on the S-JTSK (S-JTSK03) coordinates

Křovák's conformal conical projection in the general position applied in the S-JTSK system is not an optimal for the Slovak Republic, extreme length

distortions are from -10 to 11 cm/km. In 2010, at the request of the Geodesy, Cartography and Cadastre Authority of the Slovak Republic, Lambert's conformal conical projection in a normal position with parameters for the Slovak Republic was prepared (LCC for SR) and published in [3]. LCC for SR respects the geometric properties of the territory of Slovakia, therefore the maximum distortions are only ± 6.7 cm/km (Fig. 12).

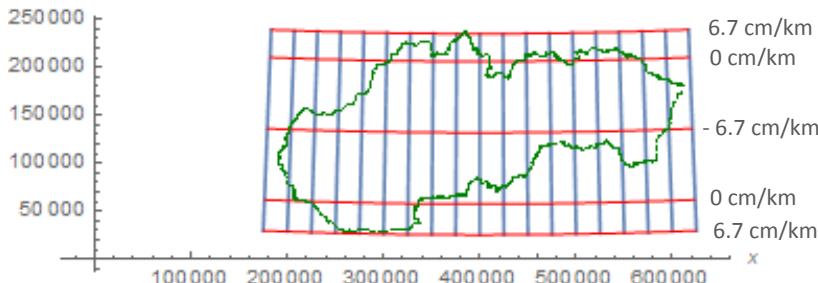


Fig. 12: Lambert's conformal conical projection for the Slovak Republic

7 Conclusion

Geometry in mathematical cartography takes various forms, which we have tried to show in this paper. Geometrical properties of reference surfaces and projected areas must be accepted in the creation of cartographic representation, but at the same time knowledge from several mentioned areas of geometry is needed.

Acknowledgements

This paper has been prepared with the support of grant projects VEGA 1/0468/20 and KEGA 008STU-4/2020.

References

- [1] A. Ábrahámová, M. Vajsálová: Kinetic Curves in Cartographic Projections. In *Proceedings of the Slovak-Czech conference on geometry and graphics 2019*, Vydavateľstvo SCHK Bratislava, 2019, S. 27-40.
- [2] M. Vajsálová: *Matematické základy kartografie*. 1. vyd. Bratislava: Spektrum STU, 2021. 443 s. ISBN 978-80-227-5114-8.
- [3] M. Vajsálová: Návrh nového kartografického zobrazenia územia Slovenskej republiky. In *Geodetický a kartografický obzor*. Roč. 57 (99), č. 8 (2011), s. 185-190. ISSN 1805-7446.
- [4] M. Vajsálová: *Metódy zobrazovania*. Bratislava: Vydavateľstvo STU, 2011, 198 s. ISBN 978-80-227-3574-2. Dostupné na internete: http://www.svf.stuba.sk/docs//dokumenty/skripta/metody_zobrazovania/index.html

30 rokov seminárov o geometrii a grafike na Slovensku

30 Years of Seminars on Geometry and Graphics in Slovakia

Daniela Velichová

*Ústav matematiky a fyziky, Strojnícka fakulta, Slovenská technická univerzita v Bratislave
Nám. slobody 17, 812 31 Bratislava, Slovak Republic
daniela.velichova@stuba.sk*

Abstract. A brief look back and an overview of the 30-years history of professional seminars on geometry and graphics held in Slovakia from the year 1991 is presented in this paper. Seminars have developed into the international Symposiums on Computer Geometry organized by the Slovak Society for Geometry and Graphics until 2014. These international conferences were joined from the year 2015 with the Conference on Geometry and Graphics held annually in the Czech Republic by the Czech Society for Geometry and Graphics. Successful 6 meetings of Slovak and Czech scientific communities active in geometry and computer graphics organised alternately in the Czech Republic and Slovakia were useful and fruitful. The 7th common Slovak-Czech Conference on Geometry and Graphics took place in Kočovce, Slovakia, in September 2021.

Keywords: seminars on geometry and graphics, events historical overview, joint conferences of SSGG and CSGG

Kľúčové slová: semináre o geometrii a grafike, prehľad histórie podujatí, spoločné konferencie SSGG a CSGG

1 Úvodom

Myšlienka organizovať celoštátne odborné semináre z geometrie sa zrodila na Fakulte strojního inženýrství Českého vysokého učení technického v Prahe. Túto iniciatívu vyvinuli a úspešne zrealizovali učitelia geometrie v roku 1981, kedy sa v Alšovicích pri Prahe konalo prvé stretnutie Odbornej skupiny pre geometriu utvorenej v rámci činnosti Jednoty československých matematikov a fyzikov. Podnetom pre vznik týchto pravidelných každoročných didakticko-vedeckých stretnutí odborníkov z celej republiky bolo centrálnie nariadené zavedenie nového predmetu Počítačová grafika na všetkých strojníckych fakultách technických vysokých škôl vtedajšej ČSSR. Vznikla naliehavá potreba riešiť mnohé nedomyšlené problémy a otázky súvisiace s obsahom predmetu, jeho technickým zabezpečením a nedostatkom odbornej literatúry pre učiteľov, nevraviač o neexistujúcej študijnej literatúre pre študentov a chýbajúcej koncepcii a zmyslu výučby samotného predmetu. Semináre sa konali striedavo v Čechách, na Morave a na Slovensku, vždy pod záštitou inej technickej vysokej školy, [2].

6. - 8. 5. 1981	Alšovice, Čechy
2. - 4. 6. 1982	Račková dolina, Slovensko
8. - 10. 6. 1983	Luháčovice, Morava
2. - 5. 5. 1984	Herbertov, Čechy
11. - 13. 6. 1985	Zemplínska Šíra, Slovensko
12. - 15. 5. 1986	Čeladná, Morava
22. - 25. 5. 1987	Zadov, Čechy
6. - 10. 6. 1988	Račková dolina, Slovensko
18. - 22. 5. 1989	Račková dolina, Slovensko
11. - 15. 6. 1990	Podolánky, Morava

Od roku 1991 sa vývoj spoločnosti a politická situácia na Slovensku a v Čechách a na Morave začali uberať iným smerom, naše cesty sa na dlhšie obdobie rozdelili a situácia vyústila v roku 1993 do rozdelenia vtedajšej Českej a slovenskej federatívnej republiky na dva samostatné štát, Slovenskú republiku a Českú republiku. Nová situácia v samostatnom školstve na Slovensku si vyžiadala vytvorenie vlastných odborno-didaktických podujatí pre potreby slovenskej geometrickej komunity pôsobiacej na slovenských vysokých školách technických, najmä na fakultách stavebných a strojníckych a na fakultách architektúry, kde zostali predmety Deskriptívna, resp. Konštrukčná geometria a Počítačová grafika pevnou súčasťou študijných programov.

2 Nesmelé začiatky

V akademickom roku 1991/92 sa skupina vysokoškolských učiteľiek a učiteľov matematiky a deskriptívnej, resp. konštrukčnej geometrie na technických vysokých školách na Slovensku dohodla na organizácii spoločných odborných seminárov zameraných predovšetkým na didaktické aspekty výučby geometrie a počítačovej grafiky na niektorých fakultách týchto škôl. Semináre boli organizované raz mesačne ako jednodňové odborné stretnutia nadväzujúce na celoštátné odborné semináre organizované v spoločnej republike do roku 1990.

Príspevky prednesené na týchto stretnutiach boli súborne publikované v zborníkoch podujatí, ktoré editačne zabezpečovali Strojnícka fakulta Slovenskej technickej univerzity v Bratislave a Materiálovo-technická fakulta v Trnave. Účastníčkami a účastníkmi týchto odborných stretnutí v akademickom roku 1991/92 s názvom Seminár o počítačovej geometrii, boli v počte 10 vysokoškolské učiteľky a učitelia zo Strojníckej fakulty STU v Bratislave a Materiálovo-technickej fakulty STU v Trnave, zo Stavebnej fakulty Technickej univerzity v Košiciach a z Vysokej školy dopravy a spojov v Žiline.

Obsah prvého zborníka je nasledovný.

Proceedings of Seminars on Computational Geometry, 1991/1992

MtF STU Trnava, SjF STU Bratislava, JSMF Trnava 1991/1992

Contents

Václav Medek, Jozef Zámožík, Karol Gajdoš: Decomposition of a Planar Region

Daniela Velichová: Creative Geometry

Daniela Velichová: Visibility

Ondrej Gallo: Qualities of Envelope Helical Surfaces Generated by a Surface of Revolution

Jaroslav Husarčík: Algorithm for Computer-aided Drawing the Curve $F(x, y) = 0$

Marián Halabrník, Jozef Zámožík, Mária Mišútová: Convex Hull of a System of Points

Semináre sa konali striedavo v Bratislave, Trnave a v Žiline, posledný tretí ročník prebehol v akademickom roku 1993/94.

3 Medzinárodné sympóziá

Komorné odborno-didaktické podujatia sa postupne časom rozšírili až na medzinárodné sympóziá organizované raz do roka, od roku 1995 pravidelne v Kočovciach, v rekreáčno-výukovom zariadení Stavebnej fakulty STU. Pozvaní zahraniční hostia zo susedných štátov, Českej republiky, Rakúska, Maďarska, Poľska, Slovinska a Chorvátska sa stali pravidelnými účastníkmi sympózií, ktorí obohatili odborný program cennými príspevkami po didaktickej aj odborno-vedeckej stránke. Z domáčich univerzít pribudli účastníci zo Stavebnej fakulty STU v Bratislave, z Vysokej školy poľnohospodárskej v Nitre, z Technickej univerzity vo Zvolene a z Matematicko-fyzikálnej fakulty Univerzity Komenského v Bratislave. Ich počet postupne rástol a v roku 1996 sa sympózia zúčastnilo až 44 účastníčok a účastníkov z deviatich krajín Európy.



Obr. 1: Účastníčky a účastníci sympózia SCG'96 v Kočovciach

Proceedings of Seminars on Computational Geometry SCG'96**SjF STU Bratislava, SvF STU Bratislava, September 1996, Kočovce****Contents**

Mária Mišútová (SR): Jeden z prístupov ku konštrukcii hranice množiny bodov

Edita Vranková (SR): Algoritmus hustých rozmiestnení dvoch mnohouholníkov s využitím stredovej súmernosti

Hana Stúpalová (SR): Niektoré algoritmy spracovania bitmapových obrazov

Daniela Richtáriková (SR): Rozšírenie výučbového programu zobrazovania scén zložených z mnohostenov

Andrej Ferko, Elena Šikudová (SR): O niektorých trendoch v počítačovej grafike

Ewa Kalinowska (Poľsko): Computer Aided Teaching about Transformations of Basic Elements in Monge's Projection

Henryk Gliński (Poľsko): Using AutoCAD in Teaching Geometry - Examples

Anna Blach, Ewa Kalinowska (Poľsko): Choice of Computer Programs in Aspect of Their Use in Geometry

Pál Ledneczki (Maďarsko): Motivation and Solving Geometric Problems with Maple

Ján Čižmár (SR): O význame základného poľa v geometrii alebo nie je rovina ako rovina

Václav Šobr (ČR): Křivky konstantní šírky na jednodílném hyperboloidu

Štefan Novotný (SR): Algoritmus pre zobrazenie konečnej geometrie (4,3)

Imrich Komara (SR): Harmonické vlastnosti istej nelineárnej relácie

Wolfgang Rath (Rakúsko): A Software Package for Non-Euclidean Geometry

Borut Zlobec Jurčič, Neža Mramor Kosta (Slovinsko): Algebraic Description of Some Geometric Constructions

Hellmuth Stachel (Rakúsko): Flexing Models of Quadrics

Ludmila Czech (Poľsko): Application of Universal Conic Construction

Gunter Weiss (Rakúsko): Attracting Process on Point and line Configurations in the Real Projective Plane

Lidija Pletenac (Chorvátsky): Interactive Surface Design Using AutoCAD

Andreas Asperl, Walter Klein (Rakúsko): Computer Aided Geometry Lessons in Austrian Schools

Dagmar Szarková (SR): Charakteristika obalovej rotačnej plochy vytvorenjej rotačnou plochou

Soňa Kudličková (SR): Krivky triedy C/GC a C/C k interpolácii a aproximácii danej množiny bodov

Valent Zaťko (SR): Some Expressions of Blossoms

Anna Blach (Poľsko): Modelling an Engineer Profile through Teaching Geometry and Engineering Graphics

Antonina Žaba (Poľsko): Geometric Aspects of Studies of Baroque Illusive Frescos

Bernd Liebscher (Nemecko): CoGeo-Design , Implementation and Application of a System for Teaching Computer Geometry

Vsevolod Michajlenko (Ukrajina): Descriptive Geometry and Computer Graphics as United Discipline

Daniela Velichová (SR): Ôsma medzinárodná konferencia o technológiách v univerzitnej matematike ICTCM 95

Od roku 1998 už boli zborníky Sympózií o počítačovej geometrii SCG vydávané aj s prideleným ISBN číslom. Úplný archív všetkých konferencií so zoznamom účastníkov, obsahom zborníka každého ročníka a albumom fotografií

je k dispozícii k nahliadnutiu na informačných stránkach sympózia na adrese <http://www.ssgg.sk/scg/> v adresári <http://www.ssgg.sk/scg/seminare.htm>, ktoré sú súčasťou webových stránok Slovenskej spoločnosti pre Geometriu a Grafiku, na adrese [1].

Spoločnosť SSGG, ktorá bola oficiálne zaregistrovaná 13.5.2002 na Ministerstve vnútra Slovenskej republiky ako občianske združenie, sa ujala organizácie podujatí a administrácie ich webových stránok s on-line registráciou. V archíve sú od roku 2003 v obsahu zborníka uvedené tiež abstrakty publikovaných článkov, ktoré boli na príslušnom sympózium prezentované.

V roku 2009 vznikol v rámci činnosti Slovenskej spoločnosti pre Geometriu a Grafiku Slovenský GeoGebra Inštitút, na základe iniciatívy International GeoGebra Institute vytvoriť lokálne inštitúty. Počas sympózia SCG'2009 sa konal prvý Slovenský GeoGebra workshop, jednodňové podujatie, ktoré sa stalo súčasťou všetkých nasledujúcich ročníkov. Programom týchto didakticko-odborných pracovných stretnutí aktívnych používateľov softvéru GeoGebra sú prezentácie vlastnej tvorby a zdieľanie vytvorených učebných materiálov, ktoré autorky a autori využívajú vo svojej pedagogickej práci, ako aj krátke inštruktázne prednášky renomovaných používateľov softvéru pre začiatočníkov. Workshopy sú organizované pre všetkých záujemcov zo základných škôl až po univerzity, účasť je bezplatná. Majú slúžiť ako fórum prístupné pre učiteľky a učiteľov matematiky a geometrie na všetkých typoch škôl, umožňujúce zdieľať navzájom svoje skúsenosti, upozorniť na možné problémy, či predstaviť svoje úspechy a dobré výsledky dosiahnuté používaním najnovších informačných technológií a komunikačných prostriedkov vo výučbe geometrie a matematiky.



Obr. 2: Účastníčky a účastníci sympózia SCG'2013

Počet účastníkov sympózií začal od roku 2013 klesať, a v roku 2014 sa podujatie konalo na Strojnickej fakulte STU v Bratislave s komorným počtom 26 prítomných. Podobná situácia nastala aj v Českej republike, kde počet účastníkov konferencií organizovaných Českou spoločnosťí pro geometrii a grafiku tiež neustále klesal. Počas 33. Konference o geometrii a grafice, ktorá sa konala roku 2014 v Českej republike v Novém Městě na Moravě, sa prítomní, členky, členovia a vedenie oboch spoločností, dohodli na obnovení tradície spoločných stretnutí od roku 2015.

4 Spoločné konferencie

Slovenská spoločnosť pre Geometriu a Grafiku sa ujala úlohy zorganizovať prvú Slovensko-českú konferenciu o geometrii a grafike ako spoločné podujatie, súbeh „slovenského“ Sympózia o počítačovej geometrii SCG'2015 a „českej“ 35. Konference o geometrii a grafice. Podujatie, ktoré sa stretlo s mimoriadne pozitívnym ohlasom, sa konalo v rázovitej slovenskej obci Terchová.

57 prítomných zo šiestich krajín (Slovensko, Česká republika, Poľsko, Maďarsko, Rakúsko, Austrália) strávilo príjemné tri rušné dni naplnené nielen kvalitným odborným programom podujatia. Tvorivá pracovná atmosféra bola umocnená krásnou prírodou malebnej Malej Fatry, pohostinstvom obyvateľov obce Terchová a životu zábavou počas spoločenského večera, na ktorom si všetci prítomní spoločne schutí zaspievali za sprievodu miestnej hudobnej skupiny s nezvyčajnými tradičnými ľudovými hudobnými nástrojmi.

Rovnako úspešné boli aj ostatné ročníky spoločných konferencií, ktoré sa konali striedavo v Českej republike a na Slovensku.

12. – 15. 9. 2016	Rožnov pod Radhoštěm, ČR
11. – 4. 9. 2017	Vŕatské Podhradie, SR
10. – 13. 9. 2018	Blansko, ČR
9. – 12. 9. 2019	Trenčianske Teplice, SR
7. – 10. 9. 2020	Pardubice, ČR

Obnovená tradícia spoločných podujatí potvrdila, aké blízke si aj naďalej ostávajú slovenská a česká komunita, aké takmer identické problémy je potrebné riešiť v oboch krajinách v súvislosti s klesajúcim záujmom o štúdium geometrie a prírodných vied všeobecne, či ako úspešne napreduje vývoj a vedecké bádanie v oblasti geometrie, geometrického modelovania a počítačovej grafiky. Konferencie tiež ukázali, aká potrebná je vzájomná spolupráca, informovanosť o dianí v našich republikách a udržiavanie spoločného kontextu dlhoročných tradícií vzájomnej podpory a spolupráce, či už v oblasti pedagogicko-didaktickej alebo vedeckej činnosti.

Organizátori 6. česko-slovenskej konferencie v Pardubiciach v Českej republike v kritickom roku 2020 počas celosvetovej pandémie Covid 19 si zaslúžia mimoriadne uznanie za usporiadanie konferencie v tomto náročnom období, a v hybridnej forme, keď umožnili účastníčkam a účastníkom zo Slovenska, ktorí sa nemohli konferencie zúčastiť prezenčne kvôli karanténnym protipandemickým opatreniam, prednieť svoje príspevky on-line.

5 Záverom

Ostatným úspešným spoločným podujatím Slovenskej spoločnosti pre Geometriu a Grafiku a České společnosti pro geometrii a grafiku je 7. slovensko-česká konferencia o geometrii a grafike, ktorá sa konala 13. – 16. 9. 2021 v Kočovciach na Slovensku. 34 účastníčok a účastníkov zo Slovenskej republiky, z Českej republiky a z Rakúska strávilo tri slnečné septembrové dni končiaceho sa leta v renesančnom kaštieli, ktorý je rekreačno-výcvikovým strediskom Stavebnej fakulty STU v Bratislave. Po siedmich rokoch sa konferencia konala opäť v Kočovciach, v zrekonštruovaných priestoroch historickej budovy, aj v novej modernej budove v prednáškovej sále vybavenej najnovšou prezentačnou technikou.



Obr. 3: Účasť na 7. slovensko-českej konferencie o geometrii a grafike

Obzvlášť príjemným poznáním je skutočnosť, že podujatia sa pravidelne a radi zúčastňujú najvýznamnejšie európske vedecké osobnosti v oblasti geometrie, aplikovanej geometrie, geometrického modelovania a počítačovej grafiky, ktorými nesporne sú profesor Gunter Weiss a profesor Hellmuth Stachel z Rakúska, profesor Emil Molnár z Maďarska, profesor Pavel Pech a profesor Miroslav Lávička z Českej republiky, ako aj profesor Ján Čižmár, docentka Mária Kmeťová a docentka Margita Vajsábllová zo Slovenska, ktorí svojimi zaujímavými, podnetnými a fundovanými prednáškami prispievajú k vysokej odbornej kvalite konferencií.

Všetky príspevky, ktoré odzneli na konferencii, boli na vysokej odbornej úrovni a prezentované kultivovaným prednesom skúsených prednášajúcich, o čom svedčí aj záujem, s akým ich vzorne sledovali všetci účastníci. Pozorným poslucháčkom a poslucháčom priniesli mnoho podnetných myšlienok, inšpiratívnych nápadov, a istotne aj mnoho nových poznatkov. Za tieto zodpovedne pripravené príspevky patrí všetkým prezentujúcim naše uznanie, obdiv a srdečná vďaka od organizátoriek konferencie.

Potešujúcim zistením je aj fakt, že na konferenciách sa úspešne zúčastňuje mladá generácia. Svoje prvé, ale i ďalšie vedecké či didaktické príspevky na tomto fóre prednášajú mnohé študentky a študenti doktorandských študijných programov zameraných na príslušné pedagogické a vedné odbory. Nepochybne, aj zásluhou skúseností nadobudnutých svojimi prezentáciami v komornom, avšak profesionálne vysoko erudovanom prostredí týchto spoločných stretnutí stredoeurópskej geometrickej komunity mali a autorka verí, že aj naďalej budú mať možnosť postupne vyrásť na mladé úspešné vedkyne a úspešných vedcov. Sú tou najlepšou zárukou, že táto užitočná tradícia stretnutí profesionálov v oblasti geometrie nezanikne.

Literatúra

- [1] Slovenská spoločnosť pre Geometriu a Grafiku, webstránka na adrese
<http://www.ssgg.sk>
- [2] Česká společnost pro geometrii a grafiku, webstránka na adrese
<http://www.csgg.cz>

Twisted Filaments with Polyhedral Symmetries

Michal Zamboj

*Department of Mathematics and Mathematical Education,
Faculty of Education, Charles University
M. Rettigove 4, 116 39 Prague 1, Czech Republic
michal.zamboj@pedf.cuni.cz*

Abstract. Twisted filaments are common structures in nature. We describe a geometric method of their creation such that they possess symmetries given by predefined polyhedra. We start from a “well-chosen” polyhedron mapped to a circumscribed 2-sphere. Using the Hopf fibration, the preimages of the vertices on the 2-sphere create circular fibers on a 3-sphere. Moreover, circles around the vertices on a 2-sphere form torus filaments around the fibers on a 3-sphere. After all, we visualize the filaments inside of the 3-sphere in a double-orthogonal projection and stereographic projection.

Keywords: Twisted filaments, polyhedron, multidimensional visualization, torus, Hopf fibration.

1 Introduction



Figure 1: a) twisted tree bark (a picture from the conference excursion), b) twisted strings.

Our universe provides us with magnificent structures. One of such structures is twisted filaments or tubes briefly described in the following lines. They can be found in organic and synthetic materials, physical phenomena, design, and so forth (see Figure 1). Imagining a twisted stack of cables, we might ask how many of them touch each other or wonder about their inner organization. We describe a method to create filamentous structures defined by selected polyhedra. Our results will create twisted filaments in a four-dimensional space. However, their stereographic projection into a three-dimensional space will create impressive surface structures worth studying. This contribution is based on

the studies of twisted filaments [2, 1], and it is an extension of [5] with further generating polyhedra. The four-dimensional visualization method through double orthogonal projections used for figures is described in [3] and connection to stereographic projection in [4]. The visualizations in this paper are created in *Wolfram Mathematica*.

2 Constructing twisted filaments

2.1 The Hopf fibration

Our creation of twisted filaments is based on a topological mapping between 3-spheres and 2-spheres called the Hopf fibration. A 2-sphere is a classical sphere embeddable into a 3-dimensional space, and a 3-sphere is its generalization embedded in a 4-dimensional space. In the Hopf fibration, circles on a 3-sphere are mapped to points on a 2-sphere. In this paper, we will use the opposite direction and map points on a 2-sphere to circles on a 3-sphere. A point P on the (doubly covered) unit 2-sphere with coordinates $P = (\cos \varphi \sin \psi, \sin \varphi \sin \psi, \cos \psi)$, for $\varphi \in \langle 0, 4\pi \rangle$, $\psi \in \langle 0, \pi \rangle$ gives a circle:

$$p' = \left(\cos \frac{\varphi + \xi}{2} \sin \frac{\psi}{2}, \sin \frac{\varphi + \xi}{2} \sin \frac{\psi}{2}, \cos \frac{\varphi - \xi}{2} \cos \frac{\psi}{2}, \sin \frac{\varphi - \xi}{2} \cos \frac{\psi}{2} \right)$$

for $\xi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ on the unit 3-sphere. Distinct points on the 2-sphere give non-intersecting circles on the 3-sphere. Furthermore, circles on the 2-sphere correspond to tori on the 3-sphere.

2.2 The process (Figure 2)

1. In the first step, we choose a polyhedron with edges of equal length such that its projection to a circumscribed 2-sphere preserves the equality of arc lengths (Figure 2a). For example, uniform convex polyhedra (names listed in Figure 4) are in a (non-exclusive) subset of polyhedra with this property.
2. Next, we project the vertices of the polyhedron on a 2-sphere and connect them with equiradial circles around the projected vertices (Figure 2b).
3. Using the “inverse” Hopf fibration, vertices on the circumscribed 2-sphere become fibers on a 3-sphere; circles with points of tangency on the 2-sphere become tori with circles of tangency on this 3-sphere.
4. Let the unit 3-sphere be in the cartesian coordinate system with axes x, y, z, w with center $(0, 1, 0, 1)$ and project it orthogonally into 3-spaces x, y, z and x, z, w . The orthogonal images in the 3-spaces are balls. The final image consists of two conjugated 3-dimensional models placed to each other with common plane (x, z) and orthogonal axes y and w with opposite orientations (Figure 2c).

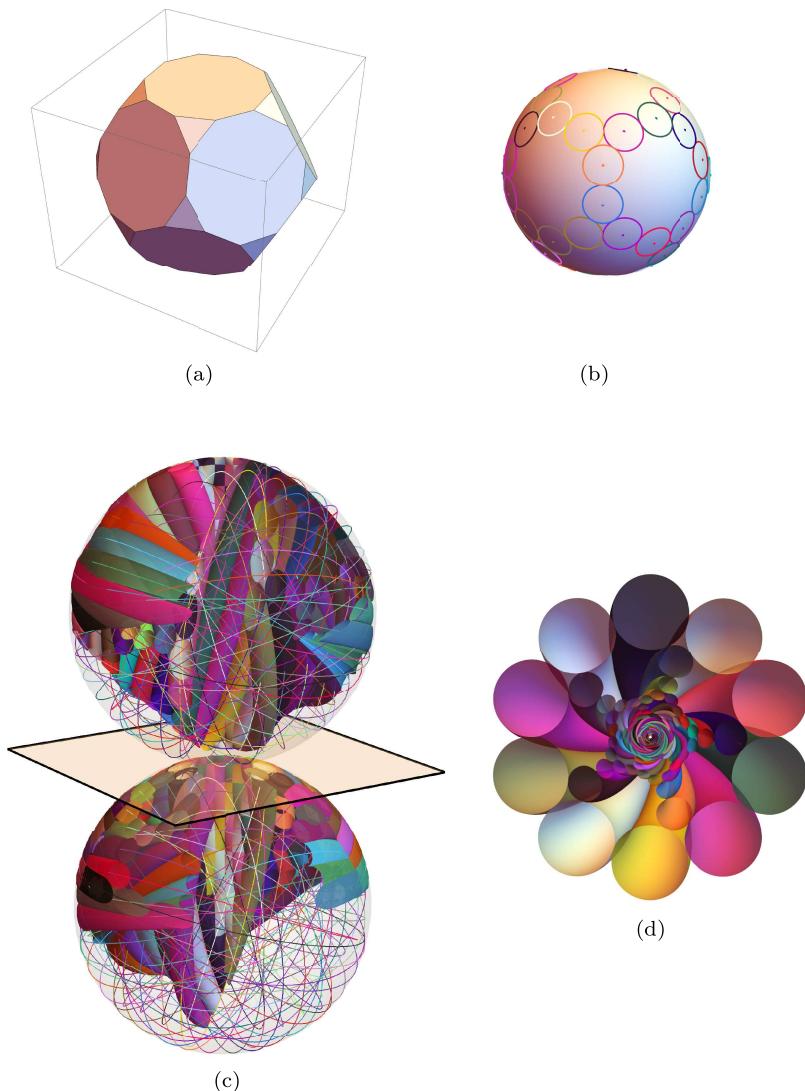


Figure 2: a) truncated dodecahedron, b) projection of the vertices into a sphere with surrounding tangential circular areas, c) double orthogonal projection of the Hopf tori generated by circles (filaments are restricted for better visualization), d) cross-section of the stereographic image of filaments.

5. Furthermore, the sphere is stereographically projected from its pole ($(0, 2, 0, 1)$ in our figures) onto the tangent 3-space in the antipodal point. Stereographic projection preserves circles and tori, but not their equal radii. The cross-section through the plane of symmetry is visualized in Figure 2d. A short analysis of geometric properties is in Figure 3.

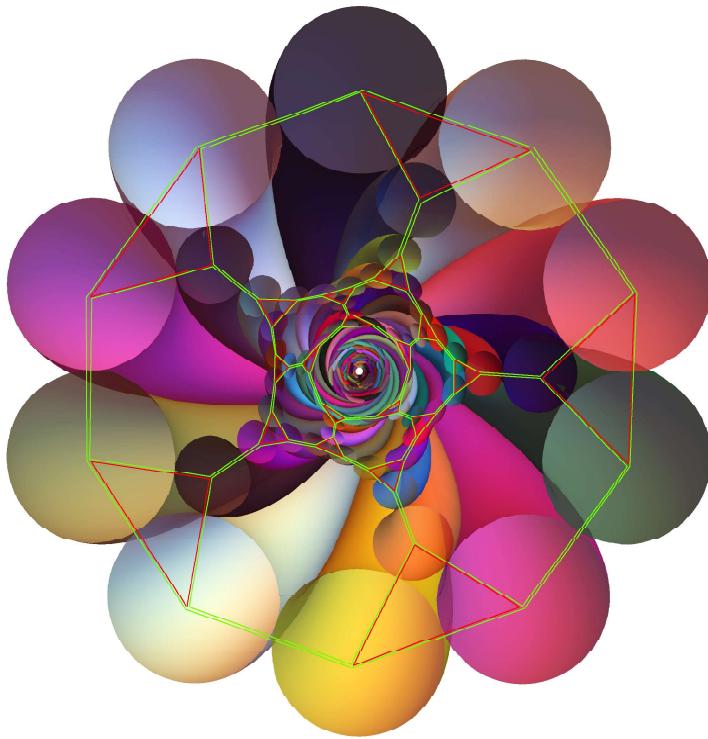


Figure 3: A geometric analysis of the stereographic image of twisted filaments generated by truncated dodecahedron. The filamentous structure holds inner vertex, edge, and face symmetries. Each filament (torus) corresponds to one vertex of the truncated dodecahedron. There are sixty filaments in total. Filaments touch along ninety circles (fibers of points of tangency after the projection of the polyhedron onto a 2-sphere), which correspond to edges. Twenty triangular faces are highlighted in red and twelve decagonal faces in green. The distortion of distance (radii of the tori) is caused by stereographic projection.

3 Conclusion

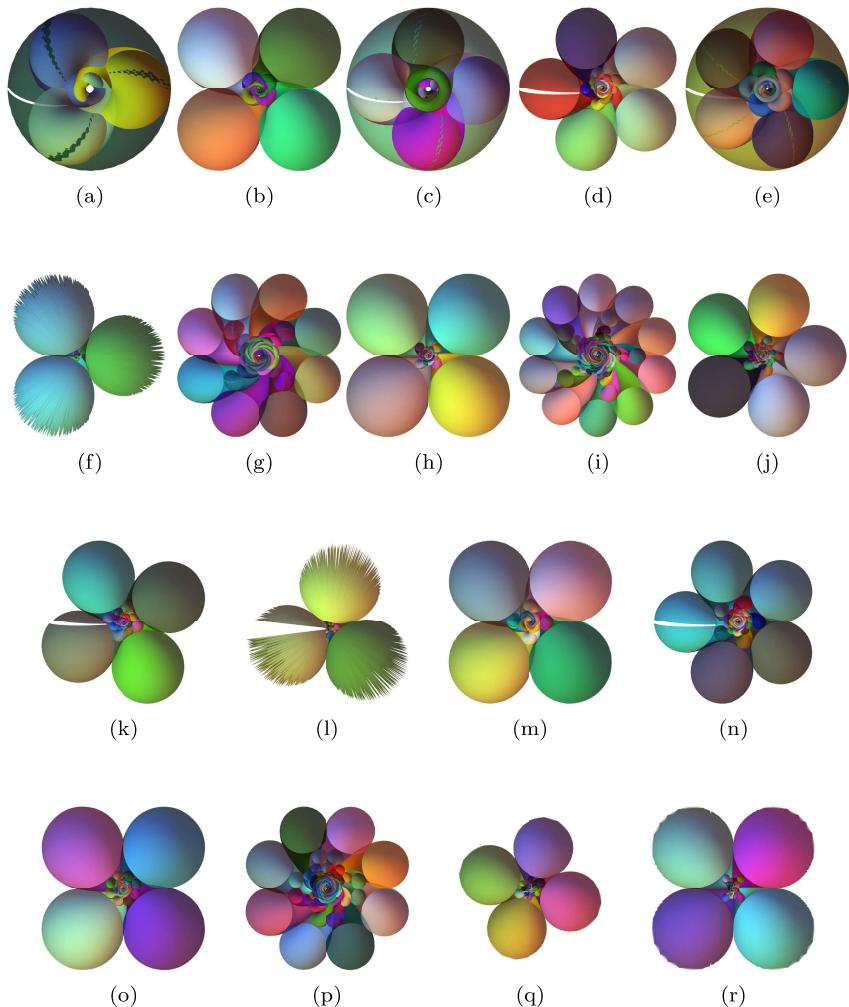


Figure 4: Stereographic images of filaments generated by a) tetrahedron, b) hexahedron, c) octahedron, d) dodecahedron, e) icosahedron, f) truncated tetrahedron, g) truncated hexahedron, h) truncated octahedron, i) truncated dodecahedron, j) truncated icosahedron, k) snub hexahedron, l) snub dodecahedron, m) cuboctahedron, n) icosidodecahedron, o) small rhombicuboctahedron, p) great rhombicuboctahedron, q) small rhombicosidodecahedron, r) great rhombicosidodecahedron.

We have briefly demonstrated a method to create twisted filaments in four-dimensional space with the properties of uniform convex polyhedra. The two main substances were the Hopf fibration —making circles from vertices; and stereographic projection — mapping points on a 3-sphere into a 3-space. Substituting polyhedron's vertices with tangential filaments and edges with circles of tangency, we have created filamentous structures carrying identical structural symmetries. The gallery of stereographic images of all filamentous structures generated by this method over convex uniform polyhedra is in Figure 4.

References

- [1] G. M. Grason: Colloquium: Geometry and optimal packing of twisted columns and filaments. *Reviews of Modern Physics*. 87(2), 2015, pp. 401—419.
- [2] Kléman M.: Frustration in polymers. *Journal de Physique Lettres*. 46(16), 1985, pp. 723—732.
- [3] M. Zamboj: Double Orthogonal Projection of Four-Dimensional Objects onto Two Perpendicular Three-Dimensional Spaces, *Nexus Network Journal*. 20(1), 2018, pp. 267—281.
- [4] M. Zamboj: Interactive 4-D Visualization of Stereographic Images from the Double Orthogonal Projection. In: Cheng LY. (eds) *ICGG 2020 - Proceedings of the 19th International Conference on Geometry and Graphics*. ICGG 2021. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol 1296, pp. 115–126. Springer, Cham.
- [5] M. Zamboj: Synthetic construction of the Hopf fibration in a double orthogonal projection of 4-space. *Journal of Computational Design and Engineering*. 8(3), 2021, pp. 836—854.

List of Participants

Bizzarri	Michal	KMA FAV, Západočeská univerzita v Plzni
Bosáková	Adriana	KAG FMFI, Univerzita Komenského v Bratislave
Bulantová	Jana	FAST, Vysoké učení technické v Brně
Čížmár	Ján	Bratislava
Ferdianová	Věra	KMA PF, Ostravská univerzita
Hašek	Roman	KM PF, Jihočeská univerzita v Č. Budějovicích
Hlavová	Marie	Fakulta strojní, ČVUT v Praze
Holešová	Michaela	SvF, Žilinská univerzita v Žiline
Chalmovianský	Pavel	KAG FMFI, Univerzita Komenského v Bratislave
Chodorová	Marie	KAG PF, Univerzita Palackého v Olomouci
Kolářová	Dana	KM Fakulta architektury, ČVUT v Praze
Kolcun	Alexej	Ústav Geoniky AV ČR, Ostrava
Lávička	Miroslav	KMA FAV, Západočeská univerzita v Plzni
Mackovová	Alžbeta	KAG FMFI, Univerzita Komenského v Bratislave
Makovník	Marcel	KAG FMFI, Univerzita Komenského v Bratislave
Pech	Pavel	KM PF, Jihočeská univerzita v Č. Budějovicích
Piovarčí	Michal	IST Austria, Klosterneuburg
Procházková	Martina	KMA PF, Ostravská Univerzita
Řada	Jakub	MFF Univerzita Karlova, Praha
Rückschlossová	Tatiana	KMDG SvF, STU v Bratislave
Richtáriková	Daniela	ÚMF SjF, STU v Bratislave
Stachel	Hellmuth	Technische Universität Wien
Szarková	Dagmar	SSGG, Bratislava
Šafařík	Jan	FAST, VUT v Brně
Vajsáblová	Margita	KMDG SvF, STU v Bratislave
Velich	Ilja	Bratislava
Velichová	Daniela	ÚMF SjF, STU v Bratislave
Vršek	Jan	KMA FAV, Západočeská univerzita v Plzni
Weiss	Gunter	Technische Universität Wien
Zamboj	Michal	KMDM PF, Univerzita Karlova, Praha
Zeman	Jan	CTS, Univerzita Karlova, Praha
Zrůstová	Lucie	FAST, Vysoké učení technické v Brně

Proceedings of the
SLOVAK-CZECH CONFERENCE
ON GEOMETRY AND GRAPHICS 2021

Editors:
Daniela Velichová, Miroslav Lávička, Dagmar Szarková

Published by
Vydavatelský servis
Republikánská 28, Plzeň



First Edition

Plzeň 2021

ISBN 978-80-86843-72-8 (online)
ISBN 978-80-86843-73-5 (CD-ROM)